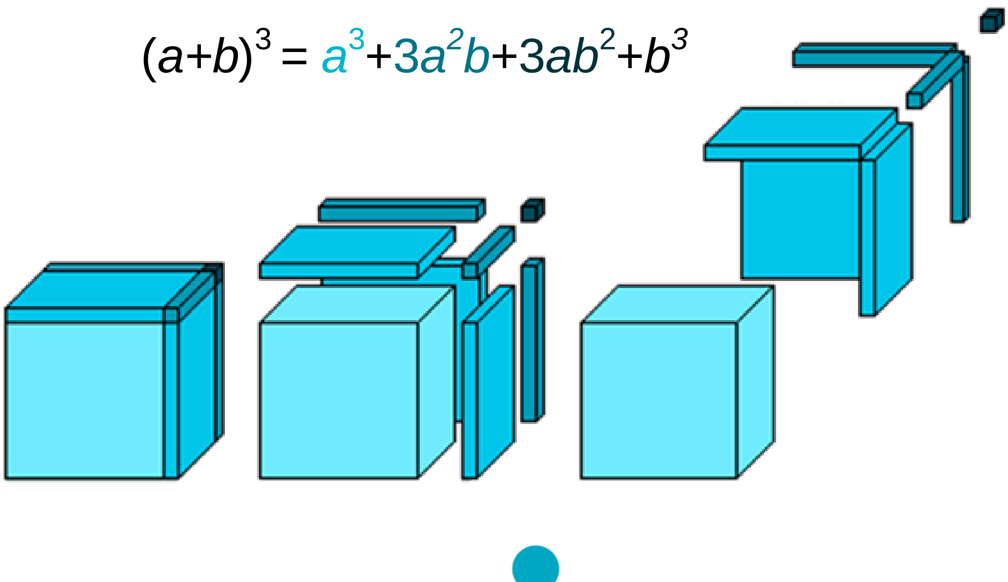
Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

ALGEBRA

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$



samk

ESIPUHE

Tekniikan alan matematiikan oppimateriaalisarjallamme on takanaan jo pitkä historia. Allekirjoittaneista Timo Ojala alkoi 1990-luvun loppupuolella perhevoimin kirjoittaa insinöörikoulutukseen sopivaa monistesarjaa leikillisellä työnimellä ”Ojalain laskuopit”. Sarjan nimi juonsi juurensa edellisen sukupolven yleisesti käyttämään sanontaan ”Ojalan laskuopin mukaan”, jolla vanhimmat silloisista torikauppiaista halusivat edelleenkin vakuuttaa suorittamiensa päässälaskujen paikkansapitävyyden.

Allekirjoittaneet tekijät ovat jo vuosien ajan laajentaneet, täydentäneet ja muokanneet oppimateriaalisarjaa ottaen huomioon sekä laskennan apuvälineiden jatkuvasti voimistuvan kehittymisen että ne TkT Timo Rannan kokemukset, jotka hän on saanut käyttäessään monisteita aiemmin opitun matematiikan kertaamiseen omassa insinööristä diplomi-insinööriksi -opetuksessaan Tampereen teknillisen yliopiston Porin laitoksella.

Oppimateriaaleistamme on jo ilmestynyt tai tulee suunnitelmiemme mukaan vuoden 2016 aikana päivitettynä ilmestymään Satakunnan ammattikorkeakoulun Oppimateriaalit-sarjassa seuraavat ilmaiset PDF-muotoiset oppimateriaalit

Matematiikan perustietojen kertaus, 71 sivua
Algebra, kaksi osaa, yhteensä 194 sivua
Geometria, kaksi osaa, yhteensä 145 sivua
Differentiaali- ja integraalilaskenta, kaksi osaa, yhteensä n. 160 sivua
Differentiaaliyhtälöt, n. 70 sivua.

Kaikki halukkaat opettajat saavat kopioida edellä mainituista oppimateriaaleista sekä omaan opetuskäyttöönsä että oppilailleen jaettavaksi mitkä tahansa sivut tai vaihtoehtoisesti kertoa opiskelijoilleen, mistä he voivat ilmaiseksi kopioida tai ladata käyttöönsä tarpeelliset sivut.

Materiaalin voi tulostaa kaksipuolisiksi kopioiksi A4-arkeille siten, että keskeltä niiteillä nidottuna opiskelijalla on kätevä A5-kokoinen vihkonen. Epäkäytännöllisen vahvan vihkosen välttämiseksi algebrankin kurssimateriaali on jo valmiiksi jaettu kahteen tulostettavaan osaan, joista ensimmäinen käsittää teoksen sivut 1-101 ja toinen osa loput sivut. Materiaalin voi tietenkin tulostaa haluamassaan koossa myös kansioissa säilytettäville arkeille.

Koko monistesarjassa on pyritty voimakkaasti vähentämään käsin suoritettavaa mekaanista laskutyötä. Tällaiset rutiinithan voi siirtää tietokoneilla ja laskimilla suoritettaviksi ja mielestämme näin pitäisi menetellä insinööriopinnoissakin jo työelämään tai jatko-opintoihin valmistauduttaessa. Mekaanisen käsinlaskennan sijasta matematiikassa on ennen kaikkea pyrittävä oleellisimpien asioiden ymmärtämiseen sekä tarvittavien toimenpiteiden ja saatujen tulosten ymmärrettävään esittämiseen.

Matematiikan perustietojen kertausopasta lukuun ottamatta kaikkien muiden oppimateriaaliemme esimerkeissä on käytetty apuna symbolista laskinta TI-Nspire CX CAS. Annetuista ohjeista saa vinkkejä muidenkin symbolisten laskinten tai matematiikkaohjelmien hyödyntämismahdollisuuksista.

Tehokas laskennan apuväline kuuluu mielestämme insinööriopiskelijan perusvarustukseen ja sen monipuolista hyödyntämistä kannattaa opiskella alusta alkaen. Mielestämme on ehdottoman tärkeää harjoitella sopivan apuvälineen käyttöä kaikissa sellaisissakin rutiinitehtävissä, jotka pitäisi päässä laskienkin pystyä ratkaisemaan. Näin oppii parhaiten tuntemaan oman apuvälineensä käyttäytymisen eri tilanteissa.

Valtaosan alla mainitusta 44-vuotisesta opettajaurastaan Timo Ojala on pitänyt matematiikan kokeet kaksiosaisina: Käsinlaskuosuudessa on kontrolloitu henkilökohtaista laskutaitoa ilman apuvälineitä samanaikaisesti, kun tentin apuvälineosuutta varten on aina myös jo oppitunneilla pyritty selvittämään kaikkien laskutoimitusten edullisin suoritustapa ryhmän kanssa yhdessä käyttöön valitulla, useimmiten yhdenmerkkisellä apuvälineellä, joka on viime vuosina ollut edellä mainittu TI-laskin. Kurssien päätyttyä opiskelijat ovatkin todenneet, että yhteisesti käyttöön otettu symbolinen laskin on ollut erinomainen apuväline opiskelussa ja uuden oppimisessa auttaessaan "näkemään metsän puilta".

Oppikirjasarjamme monissa harjoitustehtävissä on ensin yksi tai useampi v-osio, joiden vastaukset ovat monisteen lopussa. Näiden tehtävien avulla opiskelija voi kotitehtäviä tehdessään kontrolloida omaa osaamistaan. Varsinaiset kotitehtävät on tarkoitus antaa tehtävien a-, b-,… osioista, joiden vastauksia ei ole annettu. **Kaikki käsin laskettaviksi määritellyt mekaaniset tehtävät voi ja ehdottomasti kannattaakin aina tarkistaa laskimella.** Vastausten puuttuminen varsinaisista kotitehtävistä on tarkoituksellista: Oman ratkaisun kriittinen arviointi on ehkä tärkein osa koko tehtävän suoritusta ja sitä pitäisi opetella myös harjoitustehtävien yhteydessä. Käytännön elämässäkään ei oman ratkaisun oikeellisuutta voi tarkistaa mistään vastauskirjasta. Tunnilla suoritettujen kotitehtävien tarkistamisen jälkeen opiskelija voi kotona vielä uudelleen yrittää laskea v-osioita. Myös tuntiesimerkkien ja tarkistettujen kotitehtävien uudelleen laskemisella opiskelija voi harjoitella kokeisiin ja testata omaa osaamistaan.

On selvää, että matematiikkaa voi oppia soveltamaan vain suorittamalla runsaasti erilaisia tehtäviä sekä käsin laskien että apuvälineitä hyödyntäen samanaikaista teorian opiskelua kuitenkaan unohtamatta.

Oppimateriaalisarjan jatkokehittämistä varten otamme kiitollisina vastaan ilmoitukset painovirheistä ja parannusideat pienistä yksityiskohdista aina laajempiin kokonaisuuksiin asti. Samalla lausumme kiitokset myös "Ojalain laskuoppien" aiemmille kehittäjille FM Marjo Ojalalle ja päämatemaatikko, SHV Lauri Ojalalle.

Porissa 28.8.2016

Timo Ojala
Matematiikan emeritus yliopettaja
PTOL/SAMK 1977-2016
TY 1971-1977, TTKK 1987-1996
timo.ojala@live.fi

Leena Ojala
Matematiikan yo
Åbo Akademi

Timo Ranta
Matematiikan yliopisto-opettaja
TTY
timo.ranta@tut.fi

SISÄLLYSLUETTELO OSA 1

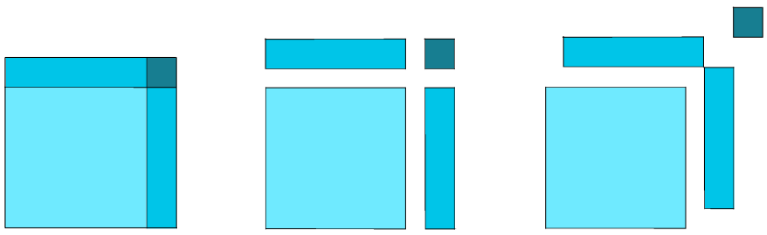
SISÄLLYSLUETTELO OSA 2

Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

ALGEBRA

Osa 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



1. LIKIARVOISTA

1.1 Yleistä

Teoreettiset tulokset esitetään yleensä tarkkoja kertoimia käyttäen.

Esimerkiksi s-sivuisen neliön lävistäjä kannattaa esittää ja muistaa muodossa $d = s\sqrt{2}$ sekä r-säteisen ympyrän piiri $p = 2\pi r$ ja pallon ala $A = 4\pi r^2$.

Tällaiset tarkat esitykset ovat ehdottoman tarkkoja sekä helpommin ymmärrettävissä ja muistettavissa kuin vastaavat likimääräiset kaavat $d \approx 1.414s$, $p \approx 6.283r$ ja $A \approx 12.566r^2$.

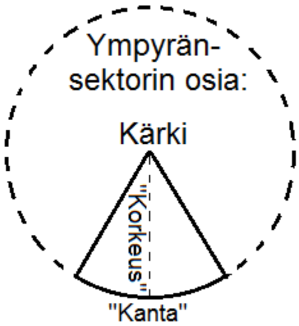
Esimerkki. Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot k \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus}$$

ja kartion tilavuus

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus}.$$

Myöhemmin integroimalla nähdään, että ”kärkeen päättyvän **2**-ulotteisen alueen” pinta-alan kaavaan liittyy kerroin $\frac{1}{\mathbf{2}}$ ja ”kärkeen päättyvän **3**-ulotteisen kappaleen” tilavuuden kaavaan liittyy kerroin $\frac{1}{\mathbf{3}}$.



Niinpä ”kärkeen päättyvänä alueena” ympyrän ala on

$$A = \frac{1}{\mathbf{2}} \cdot k \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

ja ”kärkeen päättyvänä kappaleena” pallon tilavuus on

$$V = \frac{1}{\mathbf{3}} \cdot \text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Keksitkö, mikä on ympyrän kärki ja kanta sekä pallon kärki ja pohja?

Huomautus. Havainnollisuussyistä käytännön tehtävien vastaukset esitetään jatkossa (mahdollisen tarkan arvon lisäksi) myös likiarvoina.

Esimerkki. Määritä pallon säde, jos pallon tilavuus on kuutiometri.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{4\pi}$$, lue kerrottu yhtälö oikealta vasemmalle

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1\,\text{m}^3}{4\pi}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}}}\ \text{m} \approx 0.62035049\ \text{m} \approx \underline{\underline{0.62\ \text{m}}}$$

1.2 Luvun pyöristäminen

Pitkä desimaaliluku on usein katkaistava kahdestakin syystä:

1. Lyhyt esitys on monasti havainnollisempi kuin pitkä.
2. Esimerkiksi laskimella saatuun tulokseen sisältyy usein paljon desimaaleja, joiden kaikkien luetteleminen antaisi suoritettujen mittausten tarkkuudesta väärän käsityksen.

Desimaalilukua katkaistaessa suoritetaan samalla pyöristys siten, että aiheutuva virhe jää mahdollisimman pieneksi:
Lopputulokseen jätettävä viimeinen desimaali on korotettava ylöspäin, mikäli ensimmäinen poisjätettävä desimaali on 5 tai suurempi. Jos pyöristys tehdään luvun kokonaisosassa, niin luvun suuruusluokkaa ei saa tietenkään muuttaa, vaan lopputulokseen on kirjoitettava tarpeellinen määrä nollia.

Esimerkki. Pyöristetään seuraavat desimaaliluvut **kolmen desimaalin eli tuhannesosan tarkkuuteen**. Katkaisukohta kannattaa selvyyden vuoksi merkitä pystyviivalla:

$$11.222|222 \approx 11.222 \qquad 33.555|555 \approx 33.556$$

$$33.559|666 \approx 33.560 \qquad 49.999|999 \approx 50.000$$

Esimerkki. Seuraavassa kokonaisluku 12345 pyöristetään sekä satojen tarkkuuteen että **kymmenien tarkkuuteen**:

$$123|45 \approx 12300 \qquad 1234|5 \approx 12350$$

Huomautus. Likiarvon tarkkuutta ilmaisevien numeroiden lukumäärään lasketaan kaikki luvun numerot paitsi

- kokonaisluvun lopussa olevat nollat,
- desimaaliluvun alussa olevat nollat,

jotka molemmat ovat tarpeen vain luvun suuruusluokan ilmoittamiseen.

Esimerkki. Seuraavat luvut on annettu kolmen numeron tarkkuudella

$$123000\ ,\ \ 12.3\ ,\ \ 0.0123\ ,\ \ 1.20\ ,\ \ 0.0120$$

Huomautus. Jos luku 12045 pyöristetään kolmen numeron tarkkuuteen, niin lukija voi ajatella, että vastaus 12000 onkin annettu vain kahden numeron tarkkuudella. Jos haluamme korostaa, että luku on annettu tarkemmin, niin luvun voi esittää esimerkiksi muodoissa $12.0 \cdot 10^3$ tai $0.120 \cdot 10^6$. Voidaan myös sanoa ”12000 **satojen tarkkuudella**” (tai ”**kolmen numeron tarkkuudella**”).

Esimerkki. Seuraavassa annetut tulokset pyöristetään kolmen numeron tarkkuuteen. Jos vastauksen tarkkuus jää tällöin vähänkin epäselväksi, niin esitetään pyöristetty vastaus vielä sellaisissa muodoissa, joissa lukijalle on varmuudella selvää, että tulos on annettu täsmälleen kolmen numeron tarkkuudella.

Tulos:	Tulos pyöristettynä kolmen numeron tarkkuuteen:
123456	123000 tai paremmin $\underline{\underline{123\cdot 10^3}}$ tai $1.23\cdot 10^5$
123456 m	123000 m tai paremmin $\underline{\underline{123\text{ km}}}$
12345 mg	12300 mg tai paremmin $12.3\cdot 10^3$ mg tai $\underline{\underline{12.3\text{ g}}}$
12034 mA	12000 mA tai paremmin $12.0\cdot 10^3$ mA tai $\underline{\underline{12.0\text{ A}}}$
100234	100000 tai paremmin $\underline{\underline{0.100\cdot 10^6}}$ tai $1.00\cdot 10^5$
0.012345	0.0123
0.1001	0.100
2.9965	3.00

Edellä on vielä alleviivaamalla merkitty suositeltavampi vaihtoehto, jos on esitetty kaksi muotoa, joista molemmista lukijalle varmuudella selviää, että tulos on annettu täsmälleen kolmen numeron tarkkuudella. Vastauksissa suositaan usein kantaluvun kymppi kolmella jaollista eksponenttia

$$\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$$

sillä näitä vastaa fysiikan yksiköiden tavallisimmin käytetyt etuliitteet

…, piko, nano, mikro, milli, - , kilo, mega, giga, tera, …

Harjoitustehtäviä

1.2.1 Pyöristä sadasosien tarkkuuteen

v1) 12.3456 **v2)** 1.23456 **v3)** 78.9012 **v4)** 0.00234
a) -1.2345 **b)** 7.89898 **c)** 99.9999 **d)** -0.00012

1.2.2 Pyöristä seuraavat likiarvot kolmen numeron tarkkuuteen siten, että vastauksesta lukija saa varmuuden siitä, että tulos on esitetty täsmälleen kolmen numeron tarkkuudella. Mikäli mahdollista esitä vastauksesi käyttämättä kympin potensseja.

v1) 210123 **v2)** 0.012345 **v3)** 23.4567
v4) 89012 mm **v5)** -3.45678 **v6)** 21012 g
a) 57957 **b)** -6802 mV **c)** 0.002345 V
d) 21023 ml **e)** 52040 dm^3 **f)** 0.5204 dm^3
g) 29960 mm^3 **h)** 29960

(Edellä esimerkiksi mV = millivoltti , ml = millilitra)

1.3 Likiarvon virheraja

Merkintä. Jos janan pituus s on esimerkiksi välillä $1.21\,\text{m} \le s \le 1.25\ \text{m}$, niin merkitään

$$s = (1.23 \pm 0.02)\ \text{m}.$$

Huomautus. Jos janan s pituus on välillä $1.21\,\text{m} \le s \le 1.26\ \text{m}$, niin matemaattisesti on oikein merkitä $s = (1.235 \pm 0.025)\ \text{m}$.

Kaikki eivät kuitenkaan tätä merkintää hyväksy, koska virheraja Δs halutaan monesti esittää vain yhden numeron tarkkuudella. Virheraja on siksi kasvatettava suuremmaksi 0.03 metriin ja varsinainen tulos on pyöristettävä samaan sadasosan tarkkuuteen eli 1.24 metriin. Näin saatu esitys $s = (1.24 \pm 0.03)\,\text{m}$ kattaa kuitenkin alkuperäistä laajemman välin $1.21\,\text{m} \le s \le 1.27\ \text{m}$.

Sopimus. Sovimme, että tällä kurssilla noudatetaan varsin yleistä käytäntöä, jonka mukaan

- **virheraja esitetään yhden numeron tarkkuudella.**
- **virheraja pyöristetään aina ylöspäin, ei milloinkaan alaspäin.**
- **varsinainen tulos katkaistaan virherajan määräämästä kohdasta käyttäen normaaleja pyöristyssääntöjä.**

Huomautus. Joissakin tapauksissa varsinaisen tuloksen katkaisussa tapahtuva **katkaisuvirhe** voi kasvattaa edellä käsitellyn katkaisemattoman virherajan suuremmaksi kuin ylöspäin pyöristetty alkuperäinen virheraja olisi, joten virherajaa on vieläkin kasvatettava yhdellä ”pykälällä”.

Esimerkki.

Tuloksen laskettu keskikohta tarkkoine virherajoineen	Tulos sopimuksemme mukaisesti pyöristetyin virherajoin
6.222 ± 0.333	6.2 ± 0.4
6.266 ± 0.333	6.3 ± 0.4
6.222 ± 0.366	6.2 ± 0.4
6.222 ± 0.388	6.2 ± 0.5

Huomaa, että alimman kohdan virherajaksi ei riitä 6.2 ± 0.4, sillä tämä esitys kattaa vain välin $5.8 \ldots 6.6$, kun alkuperäinen väli oli $5.834 \ldots 6.610$. Tämä johtuu siitä, että keskikohdan katkaisuvirhe 0.022 kasvattaa alkuperäisen virherajan 0.388 arvoon 0.410, joka on suurempi kuin ylöspäin pyöristetty alkuperäinen virheraja 0.4 .

Huomautus. Jos laskennallisen virherajan ensimmäiset nollasta eroavat numeromerkit ovat 10, 11, …, 14, niin virheraja esitetään joskus kahden numeron tarkkuudella (ns. **15-sääntö**).

Esimerkki. $2.345 \pm 0.123 = \begin{cases} 2.3 \pm 0.2 & \text{(sopimuksemme mukaan)} \\ 2.35 \pm 0.13 & \text{(15-sääntöä käyttäen)} \end{cases}$.

Esimerkki. Olkoot $x = 7.7 \pm 0.2$ ja $y = 2.2 \pm 0.1$. Lasketaan lausekkeet $a = 2x + 3y$, $b = 2x - 3y$ ja $c = \frac{x}{y}$ virherajoineen.

Luvun a suurin ja pienin arvo saadaan luonnollisin merkinnöin

$$a_{max} = 2x_{max} + 3y_{max} = 2 \cdot 7.9 + 3 \cdot 2.3 = 22.7 \ ,$$

$$a_{min} = 2x_{min} + 3y_{min} = 2 \cdot 7.5 + 3 \cdot 2.1 = 21.3 \ .$$

Luvun a ”keskimääräinen” arvo on $a_{keskim} = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} = \frac{22.7 + 21.3}{2} = 22$.

Luvun a maksimaalinen virhe saadaan kolmellakin eri tavalla:

$$\Delta a = a_{max} - a_{keskim} = a_{keskim} - a_{min} = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} = \frac{22.7 - 21.3}{2} = 0.7 \ .$$

Lopputuloksena saadaan siis $a = a_{keskim} \pm \Delta a = 22 \pm 0.7 = \underline{\underline{22.0 \pm 0.7}}$.

Huomaa, että erotuslausekkeen b suurinta arvoa ei saada lukujen x ja y suurimpien arvojen avulla, vaan

$$b_{max} = 2x_{max} - 3y_{min} = 2 \cdot 7.9 - 3 \cdot 2.1 = 9.5 \ .$$

Vastaavasti $b_{min} = 2x_{min} - 3y_{max} = 2 \cdot 7.5 - 3 \cdot 2.3 = 8.1$.

Koska $b_{keskim} = \frac{b_{max} + b_{min}}{2} = \frac{9.5 + 8.1}{2} = 8.8$ ja $\Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2} = \frac{9.5 - 8.1}{2} = 0.7$, niin

$$b = b_{keskim} \pm \Delta b = \underline{\underline{8.8 \pm 0.7}} \ .$$

Myös osamäärää $c = \frac{x}{y}$ **arvioitaessa on oltava varovainen:**

$$c_{max} = \frac{x_{max}}{y_{min}} = \frac{7.9}{2.1} = 3.7619 \qquad c_{min} = \frac{x_{min}}{y_{max}} = \frac{7.5}{2.3} = 3.2609$$

$$c_{keskim} = \frac{c_{max} + c_{min}}{2} = 3.5114 \qquad \Delta c = \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = 0.2505$$

$$c = c_{keskim} \pm \Delta c = 3.5114 \pm 0.2505 = \underline{\underline{3.5 \pm 0.3}}$$

Harjoitustehtäviä

1.3.1 Esitä seuraavat tulokset virherajoineen mallirivin mukaisesti kahdella tapaa: ensin siten, että väli ei mitenkään muutu, ja sitten siten, että virheraja on annettu sopimuksemme mukaisesti yhden numeron tarkkuudella. Muista, että virheraja on pyöristettävä aina ylöspäin ja tuloksen keskikohta on esitettävä vastaavalla tarkkuudella lähimpään numeroon pyöristäen.

Tulos alkuperäisin rajoin	Täsmälleen sama tulos virherajaa käyttäen	Tulos sopimuksemme mukaista virherajaa käyttäen
$12.3 \le x \le 12.8$	$x = 12.55 \pm 0.25$	$x = 12.6 \pm 0.3$
$21.7 \le x \le 22.8$		
$155.5 \le t \le 167.8$		
$0.1234 \le z \le 0.1456$		
$34.56 \le u \le 38.36$		

1.3.2 Esitä seuraavat tulokset sopimuksemme mukaisine virherajoineen

v) $x = 123.45 \pm 1.23$ $\quad y = 0.3299 \pm 0.0037$
$z = 89012 \pm 234$ $\quad u = 5.6789 \pm 0.789$

a) $x = 2345.6 \pm 23.4$ $\quad y = 8.9012 \pm 0.034$
$z = 987.65 \pm 6.54$ $\quad u = 45.678 \pm 0.789$

1.3.3 Laske $z = \dfrac{x}{y^2}$ sopimuksemme mukaisine virherajoineen, kun

v) $x = 34.5 \pm 0.2$ ja $y = 12.3 \pm 0.1$ **a)** $x = 98.7 \pm 0.3$ ja $y = 65.4 \pm 0.2$

1.3.4 Määritä teho $P = U \cdot I$ virherajoineen, kun

v) jännite $U = (235 \pm 5)\ \mathrm{V}$ ja virta $I = (2.3 \pm 0.1)\ \mathrm{A}$

a) $U = (1.5 \pm 0.1)\ \mathrm{V}$ ja $I = (26.0 \pm 0.2)\ \mathrm{mA}$. Huomaa, että $\mathrm{VA} = \mathrm{W}$.

1.3.5 Määritä virranvoimakkuus $I = \dfrac{U}{R}$ virherajoineen, kun

v) jännite $U = (9.0 \pm 0.4)\ \mathrm{V}$ ja resistanssi $R = (2.2 \pm 0.2)\ \Omega$,

a) $U = (230 \pm 10)\ \mathrm{V}$ ja $R = (35 \pm 1)\ \Omega$. Huomaa, että $\dfrac{\mathrm{V}}{\Omega} = \mathrm{A}$.

1.3.6 **v)** Laske ympyrärenkaan muotoisen levyn massa virherajoineen, kun levyn ulkosäde $R = (2.00 \pm 0.01)\ \mathrm{m}$ ja reiän säde $r = (1.20 \pm 0.02)\ \mathrm{m}$. Levyn paksuus $d = (7.0 \pm 0.4)\ \mathrm{mm}$ ja tiheys $\rho = (7850 \pm 40)\ \mathrm{kg/m^3}$.

1.4 Mittausten ja vastauksen esitystarkkuus

Käytännön tilanteissa tunnetut lähtösuureet ovat usein epätarkkoja mittaustuloksia ja niiden avulla lasketut arvot ovat luonnollisesti edelleen virheellisiä. Edellisessä pykälässä laskettu virheraja antaa oikean käsityksen virheen suuruudesta. **Virherajan laskeminen jokaisen tuloksen kohdalla on kuitenkin työlästä ja siksi seuraavassa käsittelemme tulosten esittämistä sopivien nyrkkisääntöjen avulla ilman virherajan laskemista ja esittämistä.**

Tuloksen esittäminen ylitarkasti eli tarkemmin kuin tuloksen merkitsevien numeroiden määrä oikeuttaa, on harhaanjohtavaa eikä niin saa menetellä.

Mukavuus- ja havainnollisuussyistä tulos kannattaa usein katkaista tunnettua vähäisempäänkin tarkkuuteen. Esimerkiksi Suomen maapinta-ala kannattanee esittää turistille havainnollisemmin muodossa 300 000 km^2 kuin tarkempana arvona 303 890 km^2, jonka loppuun kuultuaan turisti olisi jo ehtinyt unohtaa pinta-alan suuruusluokan. **Me sovimme kuitenkin, että tällä kurssilla tuloksia ei oma-aloitteisesti pyöristellä mukavuussyistä.**

Sopimus. Seuraavanlaisella ilman virherajaa annetulla merkinnällä $s \approx 1.23$ m (tai myös $s = 1.23$ m) tarkoitamme jatkossa tilanteesta riippuen jompaakumpaa seuraavista:

1. **Jos kyseessä on mittaustulos tai esimerkin lähtölikiarvo, niin tulkitsemme, että kyseessä on katkaisemalla ja pyöristämällä saatu tulos eli $s = (1.230 \pm 0.005)$ m eli $1.225 \text{ m} \le s \le 1.235 \text{ m}$.**
2. **Mikäli kyseessä on likiarvoista laskemalla saatu lopputulos, niin merkintämme tarkoittaa, että s on suunnilleen 1.23 m, missä viimeinen annettu numeromerkki (tai mahdollisesti useampikin numeromerkki) voi olla virheellinen, mutta me olemme suorittaneet katkaisun jollakin seuraavista nyrkkisäännöistä.**

Summalausekkeen tarkkuutta koskeva nyrkkisääntö (”summasääntö”): Lähtölikiarvojen summista, erotuksista ja (pienistä) monikerroista saatu lopputulos katkaistaan desimaalipilkkuun nähden samalta kohtaa kuin tarkkuudeltaan heikoin lähtölikiarvo on katkaistu.

Esimerkki. Jos $a \approx 1.11, b \approx 2.222$ ja $c \approx 3.3333$, niin $a + 2b + c \approx 8.8873 \approx \underline{\underline{8.89}}$.

Tuloksen katkaisukohta määräytyi termin a mukaan, koska se tunnettiin sadasosan tarkkuudella. Vastauksen esittäminen tuhannesosien tarkkuudella olisi harhaanjohtavaa, koska jo sadasosien numerokin voi olla virheellinen, onhan tarkasteltavan summalausekkeen

pienin mahdollinen arvo $1.105 + 2 \cdot 2.2215 + 3.33325 = 8.88125$

ja suurin mahdollinen arvo $1.115 + 2 \cdot 2.2225 + 3.33335 = 8.89335$.

Esimerkki. Jos $x \approx 567.8$ ja $y \approx 566.66$, niin $x - y \approx 567.8 - 566.66 = 1.14 \approx \underline{\underline{1.1}}$
Huomaa, että **likimain yhtäsuurten lukujen erotuksessa merkitsevien numeroiden lukumäärä vähenee**. Erotuksen esittäminen tarkemmin olisi harhaanjohtavaa, sillä lausekkeen pienin mahdollinen arvo on

$$x_{min} - y_{max} = 567.75 - 566.665 = 1.085$$

ja suurin mahdollinen arvo on

$$x_{max} - y_{min} = 567.85 - 566.655 = 1.195 \ .$$

Tulolausekkeen tarkkuutta koskeva nyrkkisääntö ("tulosääntö"):
Lähtölikiarvojen tuloista, osamääristä, potensseista ja juurista saatu lopputulos katkaistaan niin monen numeron tarkkuuteen kuin on merkitseviä numeroita siinä tekijässä, jossa niitä on vähiten.

Esimerkki. Jos $a \approx 1.110$, $b \approx 0.022$, $c \approx 33.33$ ja $d \approx 44.4$, niin lausekkeen $T = \dfrac{a}{b} \cdot c^2 \cdot \sqrt{d}$ arvoksi saadaan laskimella 373475.752.
Koska eri tekijöiden merkitsevien numeroiden määrät ovat 4, 2, 4 ja 3, niin "tulosäännön" mukaan vastaus tulee antaa kahden numeron tarkkuudella eli muodossa 370000 tai selvemmin $\underline{\underline{0.37 \cdot 10^6}}$.

Koska $\quad T_{min} = \dfrac{1.1095}{0.0225} \cdot 33.325^2 \cdot \sqrt{44.35} \approx 364697$

ja $\quad T_{max} = \dfrac{1.1105}{0.0215} \cdot 33.335^2 \cdot \sqrt{44.45} \approx 382663,$

niin vastauksemme toinenkaan merkitsevä numero 7 ei välttämättä ole oikea eikä vastaukseen saisikaan ottaa kolmatta merkitsevää numeroa. "Tulosääntö" antoi siis ainakin tällä kertaa sopivan katkaisukohdan.

Huomautus: Likiarvojen summa- ja tulo-operaatioista muodostuvan "sekalausekkeen" tarkkuutta voi arvioida vaiheittain seuraavan mallin mukaisesti.

Esimerkki. Tarkastellaan vaiheittain likiarvoista muodostuvaa "sekalauseketta"

$$X = 5.555 \cdot 6.666 - 8.88^2 \cdot 0.4444 = \overbrace{37.02|963}^{\text{4 numeron tarkkuus päätelty tulosäännöllä}} - \overbrace{35.0|4289536}^{\text{3 numeron tarkkuus päätelty tulosäännöllä}}$$

$$= \overbrace{1.9|8673464}^{\text{kymmenesosien tarkkuus päätelty summasäännöllä}} \approx \underline{\underline{2.0}}$$

Koska tarkasteltavan lausekkeen pienin ja suurin arvo ovat

$$5.5545 \cdot 6.6655 - 8.885^2 \cdot 0.44445 = 1.93720339875$$
$$5.5555 \cdot 6.6665 - 8.875^2 \cdot 0.44435 = 2.03623528125$$

niin vaiheittain arvioimalla saatiin ainakin tällä kertaa sopiva katkaisukohta.

Yleisen lausekkeen tarkkuutta koskeva karkea nyrkkisääntö (”yleissääntö”): Likiarvoja sisältävän yleisen lausekkeen arvo katkaistaan niin monen numeron tarkkuuteen kuin on merkitseviä numeroita siinä lähtöarvossa, jossa niitä on vähiten.

Esimerkki. ”Yleissääntöä” käyttäen edellisen esimerkin ”sekalausekkeen” X likiarvo pyöristetään kolmen numeron tarkkuuteen

$$X = 5.555 \cdot 6.666 - 8.88^2 \cdot 0.4444 = 1.98673464 \approx 1.99,$$

vaikka kolmannessa numerossa voi olla runsaan viiden yksikön virhe.

Huomautus. ”Yleissäännöllä” ei ole mitään matemaattisia perusteita ja siksi se antaa usein harhaanjohtavan katkaisukohdan. Koska opintojen tässä vaiheessa ei ole parempaakaan helppoa sääntöä esimerkiksi trigonometrisia funktioita sisältävän yleisen lausekkeen tarkkuuden arviointiin, niin mekin käytämme tätä varsin yleisesti käytettyä sääntöä ellei tehtävässä muuta vaadita.

Huomautus. Likiarvoilla laskettaessa välituloksia ei saa pyöristää, vaan laskimessa täytyy olla koko ajan mukana kaikki lasketut desimaalit. Muistiinpanoissa välivaiheiden desimaaliesitykset tietenkin katkaistaan mukavuussyistä, mutta muistiinpanoihinkin numeromerkkejä kirjataan ainakin yksi enemmän kuin mitä lopulliseen vastaukseen tulee.

Harjoitustehtäviä

1.4.1 Esitä likiarvolausekkeiden vastausten esitystarkkuutta koskevat kolme nyrkkisääntöä edellä käytettyine nimineen.

1.4.2 Laske seuraavien likiarvolausekkeiden arvot laskimella pyöristäen ne sopivan nyrkkisäännön mukaiseen tarkkuuteen. Mikä nyrkkisääntö sopii kuhunkin lausekkeeseen? Laske sitten kunkin lausekkeen pienin ja suurin mahdollinen arvo ja tutki lopuksi, onko nyrkkisäännöillä pyöristäminen antanut lausekkeen sopivalla tarkkuudella.

v) $A = 12.3 + 4.56$, $B = 12.34 \cdot 45.6$, $C = 1234 - 34.56^2$

a) $D = 123 - 98.76$, $E = \dfrac{87.65}{1.2}$, $F = 34.5 - 5.67^2$

1.4.3 Määritä seuraavien ”sekalausekkeiden” likiarvot (i) karkean yleissäännön mukaisella tarkkuudella (ii) vaiheittain tutkimalla. Laske myös lausekkeen pienin ja suurin mahdollinen arvo, jolloin voit selvittää, kuinka hyvät katkaisukohdat sait eri tavoilla.

v) $A = 4321.0 - 65.432^2$ **a)** $B = 1234{,}56 - 34{,}56789^2$

2. LAUSEKKEIDEN SIEVENTÄMISESTÄ

2.1 Yleistä

Lauseke muodostuu esimerkiksi

- luvuista (1, 0, 7, -0.2, π, …)
- lukuja esittävistä kirjaimista (a, b, … , x, y, …) tai mahdollisesti pidemmistäkin muuttujanimistä
- fysiikan suureita esittävistä kirjaimista ja tunnuksista (A, s, v, t , Δt , …)
- laskutoimituksista ($+$, $-$, $\times$, /, ^)
- funktioista ($\sqrt{\ }$, sin , cos , ln , …)
- sulkumerkeistä
- yksiköistä etuliitteineen (V, km, …)

Numeerisessa lausekkeessa ei esiinny suureita tai lukuja esittäviä tunnuksia, ei myöskään yksiköitä.

Huomautus. Monissa yhteyksissä kertolaskun kertomerkki jätetään usein merkitsemättä, niinpä $2\cdot a = 2a$, $a \cdot 2 = a2$, $a \cdot b = ab$, $a\cdot(x+1) = a(x+1)$, ...

Huomautus. Erityisesti tietoteknisissä apuvälineissä merkinnät $a2$ ja ab tarkoittavat usein vastaavanlaisiamuuttujanimiä kuin yksikirjaimisetkin nimet a ja b eikä siksi kertomerkkiä ainakaan tällaisia apuvälineitä käytettäessä saa jättää merkitsemättä, jos kirjoitelmalla halutaan tarkoittaa kahden tekijän tuloa. Merkintä $a(x+1)$ tarkoittaa puolestaan usein funktion a arvoa muuttujan arvolla $x+1$ (eli kohdassa $x+1$).

Sekaannusten välttämiseksi kertomerkki on merkittävä näkyviin ainakin tällaisiin monitulkintaisiin kohtiin. Kertomerkin näkyviin kirjoittamista kannattaisi matemaattisen tekstin käsinkirjoituksessakin harjoittaa, jotta tietoteknisiä apuvälineitä käytettäessä ei tapahtuisi kohtalokkaita erehdyksiä.

Huomaa, että esimerkiksi lukujen 2 ja 5 kertolaskua ei saa milloinkaan kirjoittaa ilman kertomerkkiä muodossa 25, koska käytössä olevan **lukujen kymmenkantaisen paikkajärjestelmän** mukaan esimerkiksi

merkintä **25** tarkoittaa lukua **2 × kymmenen + 5 × yksi = kaksikymmentäviisi** .

Lausekkeen sieventäminen (pelkistäminen) tarkoittaa lausekkeen kirjoittamista uuteen mahdollisimman yksinkertaiseen tai käyttökelpoiseen muotoon, joka on alkuperäisen lausekkeen suuruinen.
Sen merkiksi, että sievennettäessä lausekkeen arvo säilyy samana, lausekkeen eri muotojen väliin kirjoitetaan yhtäsuuruusmerkit.

Tässä monisteessa käytännön tehtävään liittyvä numeerinen lauseke sievennetään tavallisesti laskemalla sen likiarvo.

Niinpä me käytännön läheisissä tehtävissä sievennämme $\frac{3}{2+\sqrt{11}} \approx 0.564268$, vaikka kehittyneet apuvälineet tarkassa tilassa edelleen sieventävät mainitun lausekkeen historiallisena jäänteenä muotoon $\frac{3\cdot(\sqrt{11}-2)}{7}$, joka on kyllä alkuperäisen lausekkeen suuruinen, mutta nykyopiskelijalle tuskin alkuperäistä havainnollisempi. Mikäli luvun $\sqrt{11}$ likiarvo oletetaan tunnetuksi, niin jälkimmäisestä muodosta saataisiin kuitenkin käsin jakolaskua suoritettaessa lausekkeen likiarvo huomattavasti helpommin kuin alkuperäisestä.

Huomautus. Moniin kehittyneisiin tietoteknisiin apuvälineisiin matemaattiset lausekkeet voi kirjoittaa sopivia lausekemalleja käyttäen samassa tutussa kaksiulotteisessa muodossa kuin käsinkirjoituksessakin.

Huomautus. Kaksiulotteisena annettua lauseketta voidaan käsitellä kokonaisuudessaan yhdellä kertaa monilla vanhemmillakin apuvälineillä, jos lauseke ensin kirjoitetaan yhdelle riville muokattuna. **Lauseketta yhdelle riville kirjoitettaessa on siihen usein lisättävä sellaisia sulkeita, joita ei ole alkuperäisessä lausekkeessa.**

Esimerkki. Kirjoita lauseke $\frac{3+2^{5-3}}{3+\sqrt{11+5}}$ laskimeesi yksirivisenä muodossa $(3+2\,\hat{}\,(5-3))\,/\,(3+\sqrt{}(11+5))$ ja tarkista saatko vastaukseksi ykkösen.

Huomautus. Kehittyneisiin apuvälineisiin funktioiden argumentit on aina kirjoitettava sulkeiden sisälle: esimerkiksi kulman 30 astetta sini saadaan astemoodissa lausekkeesta sin(30). Monissa apuvälineissä välilyönnitön kirjoitelma sin30 on samanlainen muuttujanimi kuin *x* tai *y*1. Välilyönnillinen kirjoitelma sin 30 on puolestaan usein apuvälineiden kieliopin vastainen.

Huomautus. Lausekkeen arvoa laskettaessa lausekkeen laskutoimitukset on suoritettava sovitussa järjestyksessä:

1. Lasketaan ensin sulkeiden sisällä olevat osalausekkeet aloittaen sisimpien sulkeiden sisältä
2. Funktioiden arvon laskeminen (esim. sin , ln)
3. Potenssiinkorotukset
4. Kerto- ja jakolaskut
5. Yhteen- ja vähennyslaskut

Samanarvoiset laskutoimitukset suoritetaan vasemmalta alkaen.

Esimerkki. Tässä esimerkissä lasketaan annetun lausekkeen arvo vaiheittain yksi laskutoimitus kerrallaan edellisen huomautuksen mukaisesti sovitussa järjestyksessä alleviivaten aina seuraavaksi laskettava osalauseke:

$$5+12/(\underline{7-4})\cdot 2^2-2\cdot 3=5+12/3\cdot \underline{2^2}-2\cdot 3=5+\underline{12/3}\cdot 4-2\cdot 3=5+\underline{4\cdot 4}-2\cdot 3$$
$$=5+16-\underline{2\cdot 3}=\underline{5+16}-6=\underline{21-6}=15$$

Huomautus. Fysiikan yksikön etuliite (esimerkiksi kilo, k**) liittyy kiinteästi yksikköön (esimerkiksi metri,** m**) siten, että merkinnässä** km^2 **etuliitteen ja yksikön välinen kertolasku on matematiikan normaalisäännöistä poiketen suoritettava ennen potenssiin korotusta ts.**

$$\mathrm{km}^2=(\mathrm{km})^2=(1000\,\mathrm{m})^2=1000^2\,\mathrm{m}^2=10^6\,\mathrm{m}^2\ .$$

Etuliitteellä kertominen poikkeaa siis tavallisilla luvuilla ja muuttujilla tapahtuvasta kertomisesta. Normaalien laskujärjestyssääntöjen mukaisesti matematiikan merkinnässä ab^2 potenssiinkorotus suoritetaan ennen kertolaskua, jolloin

$$ab^2=a^1\cdot b^2\ .$$

Korostaaksemme matematiikan tavallisen merkitsemistavan ja fysiikan kerrannaisyksikön etuliitteen eroa merkitsemme jatkossa yksikönmuunnoksia suoritettaessa esimerkiksi neliökilometrin km^2 ensin selvemmässä muodossa $(\mathrm{km})^2$, johon vasta sitten sijoitamme etuliitteen arvon.

Esimerkki. $5\ \mathrm{km}^2=5\ (\mathrm{km})^2=5\cdot(1000\,\mathrm{m})^2=5\cdot 1000^2\ \mathrm{m}^2=5\cdot 10^6\ \mathrm{m}^2$

$2\ \mathrm{mm}^3=2\ (\mathrm{mm})^3=2\cdot(10^{-3}\cdot\mathrm{m})^3=2\cdot(10^{-3})^3\ \mathrm{m}^3=2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^3$

Huomaa myös esiintyneiden yksiköiden lukutapa:

Lyhenne km^2 luetaan neliökilometrinä, joka viittaa neliöön, jonka sivu on kilometri ja ala siis $(\mathrm{km})^2=(1000\,\mathrm{m})^2=10^6\ \mathrm{m}^2$. Lukutavan alkuosa ”neliö” korostaa sitä, että koko loppuosa ”kilometri” korotetaan neliöön.

Lyhennettä km^2 ei saa lukea kiloneliömetrinä, joka tarkoittaisi tuhatta neliö-

metriä. Tämän väärän lukutavan keskiosa ”neliö” viittaa siihen, että vain sanan loppuosa ”metri” korotettaisiin neliöön, jonka jälkeen vielä suoritetaan kilolla (eli tuhannella) kertominen.
Vastaavasti lyhenne mm^3 luetaan kuutiomillimetrinä, joka viittaa kuutioon, jonka särmä on millimetri ja tilavuus siis $(\mathrm{mm})^3 = (10^{-3}\mathrm{m})^3 = 10^{-9}\mathrm{m}^3$. Lyhennettä ei saa lukea millikuutiometrinä, joka tarkoittaisi tuhannesosaa kuutiometristä.

Esimerkki. Lausu perusyksikön metri avulla a) $\dfrac{8\ \mathrm{Mm}^3}{4\ \mu\mathrm{m}^2}$ b) $\dfrac{6\ \mathrm{mm}^4}{2\ \mathrm{km}^2}$

a) $\dfrac{8\ \mathrm{Mm}^3}{4\ \mu\mathrm{m}^2} = \dfrac{8\ (\mathrm{Mm})^3}{4\ (\mu\mathrm{m})^2} = \dfrac{8\cdot(10^6\mathrm{m})^3}{4\cdot(10^{-6}\mathrm{m})^2} = \dfrac{8\cdot 10^{18}\mathrm{m}^3}{4\cdot 10^{-12}\mathrm{m}^2} = 2\cdot 10^{18-(-12)}\mathrm{m} = 2\cdot 10^{30}\ \mathrm{m}$

b) $\dfrac{6\ \mathrm{mm}^4}{2\ \mathrm{km}^2} = \dfrac{6(\mathrm{mm})^4}{2(\mathrm{km})^2} = \dfrac{6(10^{-3}\ \mathrm{m})^4}{2(10^3\ \mathrm{m})^2} = \dfrac{6\cdot 10^{-12}}{2\cdot 10^6}\dfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{m}^2} = 3\cdot 10^{-18}\ \mathrm{m}^2$

Huomautus. Tiettyihin merkintöihin liittyvät lausekkeet on laskettava ennen merkinnän mukaista operaatiota:

- Juurimerkin vaakasuoran viivan alla oleva lauseke on laskettava ennen juurenottoa.
- Vaakasuoran jakoviivan ylä- ja alapuolella olevat lausekkeet on laskettava ennen jakolaskun suorittamista.
- Potenssimerkinnässä koko ylänurkassa olevan eksponenttilausekkeen arvo on laskettava ennen potenssiin korotusta ja kantaluku on korotettava näin saatuun eksponenttiin.

Huomautus. Oikeiksi todettujen laskusääntöjen avulla voidaan kuitenkin

- **tulo- ja osamäärälausekkeiden neliö- ja kuutiojuuri laskea tekijöittäin** ilman juurrettavan tarkempaa laskemista (vertaa kohta 4.2).
- **tulolausekkeiden osamäärää supistaa koko osoittajan ja koko nimittäjän yhteisellä tekijällä** ennen jaettavan ja jakajan tarkempaa laskemista (vertaa kohta 2.3).

Esimerkki. $\sqrt{3^2\cdot 4^2} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{4^2} = 3\cdot 4 = 12$, mutta
$\sqrt{3^2+4^2}$ **ei ole** $\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2} = 3+4 = 7$, vaan $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
$\dfrac{ax+ay}{am+an} = \dfrac{\cancel{a}(x+y)}{\cancel{a}(m+n)} = \dfrac{x+y}{m+n}$, mutta lauseketta $\dfrac{ax+by}{am+bn}$ **ei voi supistaa**.

Huomautus. Ilman sulkeita kirjoitettuja merkintöjä a^{b^c} ja $-a^n$ kannattaa välttää, koska eri apuvälineet tulkitsevat niitä eri tavoin. Sulkeita käytettäessä kaikki apuvälineet laskevat lausekkeet niin kuin on merkittykin.

Huomautus. Monissa matematiikan oppikirjoissa ja kaavastoissakin poiketaan joissakin tapauksissa edellä sovituista järjestyssäännöistä. Esimerkiksi lauseke $\sin 2x$ tarkoittaa sekä kaavastoissa että oppikirjoissa varsin yleisesti lauseketta $\sin(2 \cdot x)$, vaikka se yleisesti hyväksytyn ja meidän käyttämämme sopimuksen mukaan pitäisi tarkoittaa lauseketta $\sin(2) \cdot x$, koska järjestyssääntöjen mukaan funktion laskeminen suoritetaan ennen kertolaskua. Laskinta tai tietokonetta käyttäessäsi **sinun tulee joko varmistaa, miten apuvälineesi tulkitsee ilman sulkeita oleva lausekkeen, tai sitten sinun tulee lisätä sulut siten, että lauseke on yksikäsitteisesti tulkittavissa.**

Huomautus. Käsinkirjoitetussa ja painetussakin tekstissä käytetään laskujärjestyksen osoittamiseen joskus kolmenlaisia sulkeita: kaarisulkeita ( ), hakasulkeita [ ] ja aaltosulkeita { } . Tämä tietenkin auttaa sisäkkäisiä sulkeita sisältävän lausekkeen hahmottamista.

On huomattava, että **laskimissa ja tietokoneissa laskujärjestyksen osoittamiseen voidaan käyttää vain kaarisulkeita**, sillä esimerkiksi hakasulut ovat monasti vektorin ja matriisin tunnuksena.

Harjoitustehtäviä

2.1.1 Kirjoita seuraavat lausekkeet **yksirivisinä** sekä paperille, laskimeesi että taulukkolaskentaohjelmaan Excel ilman, että suoritat niissä itse mitään laskutoimituksia. Varmista kirjoitelmiesi oikeellisuus laskemalla lausekkeet käsin ja kaikilla apuvälineilläsi. (Jos kehittyneessä laskimessa on vaikeaa kirjoittaa juurrettavaa neliöjuurimerkin perään sulkeitten sisään, niin saat kyllä nyt käyttää sopivaa lausekemallia.) Mikäli mahdollista niin kirjoita ja laske lausekkeet myös laskimen lausekemallien avulla tarkalleen annetussa kaksiulotteisessa muodossa.

v1) $1+\dfrac{2}{3+4}$ **v2)** $\dfrac{1+2}{3+4}\cdot\dfrac{8-1}{4-1}$ **v3)** $\sqrt{9+16}+\sqrt{25+144}$

v4) $1+2\cdot 3^{5-4}$ **a)** $\dfrac{9+7}{8}+\dfrac{6}{2+1}$ **b)** $\dfrac{1+\dfrac{2}{3+4}}{5+\dfrac{6+7}{8}}$

c) $\sqrt{9\cdot 16}+\sqrt{\dfrac{25}{36}}$ **d)** $\dfrac{2^3+1}{3^2}-\dfrac{5^2+1}{3^2+4^2+1}$

2.2 Nimityksiä

Summalausekkeen yhteenlaskettavia sanotaan *termeiksi*.

Esimerkki. Summassa $\underbrace{2x^3y}_{\text{1. termi}} + \underbrace{3a\sin(20°)}_{\text{2. termi}} + \underbrace{5\frac{a}{b}\sqrt{c}}_{\text{3.termi}}$ on kolme termiä.

Esimerkki. Erotusta $3x-7a$ voidaan pitää summana $3x+(-7a)$, jossa on kaksi termiä $3x$ ja $-7a$.

Tulolausekkeessa keskenään kerrottavia osalausekkeita sanotaan *tekijöiksi*.

Esimerkki. Tulossa $123(2x+4yz)\sin(35°)$ on kolme tekijää, joiden väliin voi kirjoittaa kertomerkit: $\underbrace{123}_{\text{1. tekijä}} \cdot \underbrace{(2x+4yz)}_{\text{2. tekijä}} \cdot \underbrace{\sin(35°)}_{\text{3. tekijä}}$.

Esimerkki. Osamäärää $\frac{a}{b}$ voidaan pitää tekijöiden a ja $\frac{1}{b}$ tulona.

Harjoitustehtäviä

2.2.1 Luettele summalausekkeen termit ja jokaisen termin tekijät.

v) $12x+3(a+2b-3c)\sin(20°)-7a(x+2y^2)$

a) $(2-3x)(x+2y)+7xy^2-3(xy-2x+y)-11x$

2.2.2 Luettele tulolausekkeen tekijät ja jokaisen tekijän mahdolliset termit.

v1) $25ab(3x+4y^2-5uv)(\sqrt{x}+y)$ **v2)** $\frac{ab(a+b^2)}{c}$

a) $16(3x-2y+z)(x^2+y^2+z^2)xyz\sqrt{x}$ **b)** $\frac{3(x+y)z}{2a}$

2.2.3 Kirjoita summalauseke, jossa on kolme termiä, joissa jokaisessa on kaksi tekijää.

2.2.4 Kirjoita tulolauseke, jossa on kolme tekijää, joissa jokaisessa on kaksi termiä.

2.3 Murtolausekkeiden sieventämisestä

Murtolauseketta voidaan toisinaan sieventää jakamalla osoittaja ja nimittäjä tekijöihin, jonka jälkeen yhteiset tekijät voidaan supistaa.

Esimerkki. $\frac{18}{21} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 7} = \frac{6}{7}$.

Huomautus. Vain koko osoittajan ja koko nimittäjän yhteisen tekijän voi supistaa. Yksittäistä termiä tai yksittäisen termin tekijää ei saa supistaa.

Esimerkki. Lausekkeissa $\frac{2+3}{2+5}$ ja $\frac{2 \cdot 3 + 5}{2 \cdot 7 + 11}$ ei voi supistaa lukua 2, koska se on ensimmäisessä lausekkeessa osoittajan ja nimittäjän termi ja toisessa lausekkeessa se on osoittajassa ja nimittäjässä olevan termin tekijä.

Osoittajan (ja nimittäjän) jokaisessa yhteenlaskettavassa voi mahdollisesti olla sama tekijä, joka voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi ja lopuksi ehkä supistaa pois seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki. $\frac{12a^2b - 18ab^2 + 6ab}{9a^2b + 3a^2} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\,\cancel{a}b(2a-3b+1)}{\cancel{3}a^{\cancel{2}}(3b+1)} = \frac{2b(2a-3b+1)}{a(3b+1)}$ **.**

Huomautus. Tekijöihin jaettaessa sääntöjä

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

käytetään usein takaperin oikealta vasemmalle.

Esimerkki. $\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} = \frac{(2a)^2 - (3b)^2}{(2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2}$

$$= \frac{\cancel{(2a+3b)}(2a-3b)}{(2a+3b)^{\cancel{2}}} = \frac{2a-3b}{2a+3b}$$

Murtolauseke kerrotaan luvulla (tai lausekkeella) siten, että murtolausekkeen osoittaja kerrotaan kyseisellä luvulla (tai lausekkeella).

Esimerkki. $6\cdot\frac{2}{9}=\frac{6\cdot 2}{9}^{(3}=\frac{4}{3}$, $\frac{a}{bc}\cdot ab=\frac{a\cdot a\cancel{b}}{\cancel{b}c}=\frac{a^2}{c}$

Murtolauseke jaetaan luvulla (tai lausekkeella) siten, että murtolausekkeen nimittäjä kerrotaan kyseisellä luvulla (tai lausekkeella).

Esimerkki. $\frac{2}{3}:4\overset{\text{eli}}{=}\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{2}{3\cdot 4}^{(2}=\frac{1}{6}$, $\frac{a}{bc}:(ab)\overset{\text{eli}}{=}\frac{\frac{a}{bc}}{ab}=\frac{\cancel{a}}{bc\cdot\cancel{a}b}=\frac{1}{b^2c}$

Murtolausekkeet kerrotaan keskenään siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

Esimerkki. $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 4}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 2}=\frac{3}{2}$.

Lauseke jaetaan murtolausekkeella siten, että jaettava lauseke kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

Esimerkki. $\frac{3}{5}:\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}$, $abc:\frac{a}{b}\overset{\text{eli}}{=}\frac{abc}{\frac{a}{b}}=abc\cdot\frac{b}{a}=b^2c$

Murtolausekkeet lasketaan yhteen ja vähennetään siten, että lausekkeet ensin lavennetaan samannimisiksi, minkä jälkeen osoittajat lasketaan yhteen tai vähennetään.

Esimerkki. ${}^{6)}\frac{1}{6}+{}^{3)}\frac{5}{12}-{}^{4)}\frac{2}{9}=\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}+\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}-\frac{2\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}-\frac{8}{36}=\frac{6+15-8}{36}=\underline{\underline{\frac{13}{36}}}$,

missä ensin jouduttiin hakemaan nimittäjien $6=2\cdot 3$, $12=\boxed{2^2}\cdot 3$ ja $9=\boxed{3^2}$ pienin yhteinen jaettava eli $\text{pyj}=2^2\cdot 3^2=36$ kehystäen nimittäjien tekijöihinjaossa kunkin alkutekijän korkein esiintynyt potenssi.

Harjoitustehtäviä

2.3.1 Opettele kaikki ne ohjeet, jotka koskevat murtolausekkeilla laskemista. (Esim. lauseke jaetaan murtolausekkeella …)

2.3.2 Sievennä sekä laskimella että käsin kaikkine välivaiheineen lausekkeet

v1) $\frac{3x}{4}:(6x)$ **v2)** $\frac{2x}{9y}\cdot\frac{6y}{4x}$ **v3)** $\frac{4ab}{9c}:\frac{5ac}{3bc}$ **v4)** $\frac{2}{5a}-\frac{3}{4b}$

v5) $\frac{x^3y-xy^3}{x^2y+xy^2}$ **v6)** $\frac{a^2x^2-b^2}{ax-b}$ **a)** $\frac{12ab}{25c}:(3bc)$ **b)** $\frac{3a}{4b}+\frac{5b}{6a}$

c) $\frac{6ab}{5cd}\cdot\frac{10c^2}{9bd}$ **d)** $\frac{6xy}{5z}:\frac{12yz}{25x}$ **e)** $\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$ **f)** $\frac{ax-ay}{ax+ay}$

2.3.3 Suorita kertolaskut ja neliöönkorotukset sekä laskimen expand-komennolla että käsin joko kaavoja käyttäen tai paloittain aukikertoen

v1) $(2a+b)^2$ **v2)** $(3s-t)(3s+t)$ **v3)** $(5x+3y)^2$

v4) $(2u+v)(u-2v)$ **a)** $(s-4t)^2$ **b)** $(u/2+v/3)^2$

c) $(x+2y)(x-2y)$ **d)** $(3a-b)(a+3b)$ **e)** $(1/x-x)(1/x+x)$

2.3.4 Jaa tekijöihin sekä käsin että laskimen factor-komennolla lausekkeet

v1) $4x^2-y^4$ **v2)** $x^2y-6xy^2+9y^3$

a) x^2-9y^2 **b)** $4a^2+12ab+9b^2$ **c)** $\frac{x^2}{4}+xy+y^2$

d) $16u^3-25uv^2$ **e)** $8x^2+8xy+2y^2$ **f)** $4a^2+2ab+\frac{b^2}{4}$

2.3.5 Sievennä seuraavat lausekkeet sekä käsin että laskimella:

v1) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{x^2-9y^2}$ **v2)** $\frac{a^2-4b^2}{a^2-4ab+4b^2}$ **v3)** $\frac{9u^2-12uv+4v^2}{4v^2-9u^2}$

v4) $\left(\frac{3x}{2y}-\frac{2y}{3x}\right):\frac{3x+2y}{xy}$ **v5)** $\frac{8a^2-24ab+18b^2}{12a^2-27b^2}$

a) $\frac{4x^2+4xy+y^2}{8x^2-2y^2}$ **b)** $\frac{9a^2-b^2}{9a^2+6ab+b^2}$ **c)** $\frac{8u^2+8uv+2v^2}{v^2-4u^2}$

d) $\left(\frac{x}{4y}-\frac{4y}{x}\right):\frac{x-4y}{2x}$ **e)** $\frac{8a^2-40ab+50b^2}{8a^2-50b^2}$

2.4 Polynomilausekkeilla laskeminen

Muotoa $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ olevaa summaa, missä kertoimet a_i ovat kiinteitä lukuja ja x on muuttuja, sanotaan (yhden) muuttujan x **astetta** n **olevaksi polynomiksi.**

Esimerkki. $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$ on toisen asteen polynomi ja $Q(x) = 3$ on astetta nolla oleva polynomi, jota sanotaan myös **vakiopolynomi**ksi, koska polynomin arvo on muuttujasta x riippumatta vakio 3.

Huomautus. Nollapolynomi $O(x)$ tarkoittaa polynomia, joka saa kaikkialla vakioarvon nolla, ts. $O(x) \equiv 0$. Nollapolynomin astelukua ei määritellä.

Huomautus. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku sekä luvulla kertominen suoritetaan poistamalla sulut ja huomioimalla sulkeiden edessä olevan miinusmerkin ja kertoimen vaikutus kaikkiin sulkeiden sisällä oleviin termeihin seuraavan esimerkin mukaisesti. Lopuksi yhdistetään samaa astetta olevat termit.

Esimerkki. $2(x^2 - 1) - (x^2 - 2) - 2(x + 1)$

Sulkeiden edessä olevat kertoimet ja miinusmerkit vaikuttavat kaikkiin sulkeiden sisällä oleviin termeihin!

$= \underline{\underline{2x^2}} - 2 \ \underline{\underline{-x^2}} + 2 \ \underline{-2x} - 2$

Yhdistä samoin alleviivatut samanmuotoiset termit

$= (2-1)x^2 - 2x + (-2 + 2 - 2) = x^2 - x - 2$

Huomautus. Kaksi polynomia kerrotaan keskenään osittelulain mukaan siten, että ensimmäisen polynomin jokaisella termillä kerrotaan toisen polynomin jokainen termi, jonka jälkeen samanasteiset termit yhdistetään.

Esimerkki. $(2x + 3)(4x^2 - x) = 2x \cdot 4x^2 + 2x \cdot (-x) + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot (-x)$

$= 8x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 3x = 8x^3 + 10x^2 - 3x$

Huomautus. Yleensä apuvälineet eivät suorita polynomien kertolaskua auki ilman erikseen annettua expand-komentoa, sillä on tilanteita, joissa tulomuoto on käyttökelpoisempi kuin aukikerrottu lauseke.

Huomautus. Tulopolynomin aste on tekijäpolynomien asteiden summa.

Huomautus. Polynomien osamäärää voi toisinaan sieventää jakamalla osoittajan ja nimittäjän ensin tekijöihin sekä supistamalla löytyneet yhteiset tekijät.

Esimerkki. $\dfrac{24x^3-54x}{10x^3+15x^2}=\dfrac{6\cancel{x}(\overbrace{4x^2-9}^{(2x)^2-3^2})}{5x^{\cancel{2}}(2x+3)}=\dfrac{6\cancel{(2x+3)}(2x-3)}{5x\cancel{(2x+3)}}=\dfrac{6(2x-3)}{5x}$

Polynomia voidaan kutsua tarkemmalla nimellä **monomi, binomi** tai **trinomi**, jos siinä on vastaavasti yksi, kaksi tai kolme termiä.

Huomautus. Polynomi jaetaan monomilla siten, että polynomin jokainen termi erikseen jaetaan kyseisellä monomilla.

Esimerkki. $\dfrac{8x^3+5x^2-6}{2x}=\dfrac{8x^3}{2x}+\dfrac{5x^2}{2x}-\dfrac{6}{2x}=4x^2+2.5x-\dfrac{3}{x}$

Huomautus. Useampitermisellä polynomilla jakaminen on monomilla jakamista työläämpää. Polynomi voidaan jakaa enintään samanasteisella polynomilla esimerkiksi seuraavan mallin mukaisesti jakokulmassa. Katso tarvitessasi apua googlaamalla opusta ”Matematiikan perustietojen kertaus” nimellään.

Esimerkki. Jaa polynomi $4x^3+5x-2$ polynomilla $2x^2-3x+1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & +3 & & \\
\cline{2-5}
2x^2-3x+1 & 4x^3 & & +5x & -2 \\
 & \mp 4x^3 & \pm 6x^2 & \mp 2x & \\
\cline{2-5}
 & & +6x^2 & +3x & -2 \\
 & & \mp 6x^2 & \pm 9x & \mp 3 \\
\cline{3-5}
 & & & 12x & -5
\end{array}
$$

Tässä esimerkissä polynomi $4x^3+5x-2$ on **jaettava** ja polynomi $2x^2-3x+1$ on **jakaja**. Koska jako ei nyt mennyt tasan, niin lopputuloksena saatiin ns. **(vaillinainen) osamäärä** $2x+3$ ja **jakojäännökseksi** jäi vielä $12x-5$.
Näiden välillä on voimassa yhtälö

$$\boxed{\text{Jaettava} \equiv \text{jakaja} \times \text{osamäärä} + \text{jakojäännös}}$$

Tässäkin esimerkissä on helppo todeta, että

$$4x^3+5x-2=(2x^2-3x+1)\cdot(2x+3)+(12x-5).$$

Huomautus. Polynomien jakolasku on edellisen esimerkin mukaisesti mahdollista suorittaa ”auki”, jos jaettavan aste on vähintään jakajan asteen suuruinen. Tällöin on yleisesti voimassa

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Osamäärän aste} = \text{jaettavan aste} - \text{jakajan aste} \\ \text{Mahdollisen jakojäännöksen aste} < \text{jakajan aste}\end{array}}$$

Jos jaettavan aste on pienempi kuin jakajan aste, niin ”jakoa ei voi suorittaa auki” ts. osamääränä on nollapolynomi ja jakojäännöksenä on koko jaettava.

Esimerkki. Jos viidennen asteen polynomi jaetaan toisen asteen polynomilla, niin osamäärän aste on $5-2=3$ ja osamäärä on muotoa Ax^3+Bx^2+Cx+D, missä $A \neq 0$, mutta kertoimet *B, C* ja/tai *D* voivat olla nolliakin.

Samassa jakolaskussa jakojäännöksen aste on pienempi kuin 2 eli jakojäännös on enintään ensimmäisen asteen polynomina muotoa $Dx+E$, missä kertoimet *D* ja/tai *E* voivat olla nolliakin. Jos jako menee tasan, niin jakojäännös on nollapolynomi, jonka astetta ei ole määritelty, mutta sanomme silti (vähän harhaanjohtavasti!) edellisten kehystettyjen kaavojen mukaisesti jakojäännöksen asteen olevan pienempi kuin jakajan aste 2.

Huomautus. Paitsi jakokulmassa polynomien jakolaskun voi suorittaa myös sijoittamalla identiteettiin

$$\boxed{\text{Jaettava} \equiv \text{jakaja} \times \text{osamäärä} + \text{jakojäännös}}$$

tunnettu jaettava ja jakaja sekä aluksi tuntemattomilla kertoimilla varustetut osamäärä ja jakojäännös, joiden asteluvut saadaan yo huomautuksen kaavoista. Suorittamalla sitten yhtälön oikean puolen kerto- ja yhteenlaskut sekä vertaamalla eri puolilla olevien polynomien vastinkertoimia saadaan yhtälöryhmä, josta osamäärän ja jakojäännöksen kertoimet voidaan ratkaista.

Esimerkki. Suoritetaan uudelleen jo edellä jakokulmassa tehty jakolasku

$\dfrac{4x^3+5x-2}{2x^2-3x+1}$ edellä kuvatulla **määräämättömien kertoimien menetelmällä**.

Koska $\text{osamäärän aste} = \text{jaettavan aste} - \text{jakajan aste} = 3-2=1$, niin osamäärä on ensimmäisen asteen polynomina muotoa $Ax+B$, missä $A \neq 0$.

(On helppo nähdä, että kerroin *A* on murtolausekkeen johtavien kertoimien osamäärä eli nyt $A = 4/2 = 2$, mutta me haemme seuraavassa myös tämän kertoimen määräämättömien kertoimien menetelmällä.)

Koska jakojäännöksen aste $<$ jakajan aste 2, niin jakojäännös on enintään ensimmäisen asteen polynomi ja siis muotoa $Cx + D$, missä C ja/tai D voi olla nollakin.
Sijoittamalla osamäärän ja jakojäännöksen lausekkeet identiteettiin

$$\text{jaettava} \equiv \text{jakaja} \times \text{osamäärä} + \text{jakojäännös}$$

saadaan

$$4x^3 + 5x - 2 \equiv (2x^2 - 3x + 1) \cdot (Ax + B) + (Cx + D) \ ,$$

mistä aukikertomalla ja samanasteiset termit yhdistämällä saadaan identiteetti

$$\begin{aligned} 4x^3 + 5x - 2 &\equiv 2Ax^3 + 2Bx^2 - 3Ax^2 - 3Bx + Ax + B + Cx + D \\ &\equiv 2Ax^3 + (-3A + 2B)x^2 + (A - 3B + C)x + (B + D) \ . \end{aligned}$$

Vastinkertoimia vertaamalla saadaan yhtälöryhmä ja sille helposti ratkaisu etenemällä ryhmässä yhtälö kerrallaan ylhäältä alaspäin:

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ -3A + 2B = 0 \\ A - 3B + C = 5 \\ B + D = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = 12 \\ D = -5 \end{cases}$$

Osamäärä on siis $Ax + B = 2x + 3$ ja jakojäännös $Cx + D = 12x - 5$.

Huomautus. Edellisen jakolaskun voi suorittaa myös apuvälineillä. Laskimessa TI-Nspire CX CAS on käytettävissä seuraavat kaksi komentovaihtoehtoa halutusta lopputuloksesta riippuen:

$$\text{expand}\left(\frac{4x^3+5x-2}{2x^2-3x+1},x\right) \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 2x+3+\frac{12x-5}{2x^2-3x+1}$$

$$\text{propFrac}\left(\frac{4x^3+5x-2}{2x^2-3x+1},x\right) \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad 2x+3+\frac{-2}{2x-1}+\frac{7}{x-1}$$

Jälkimmäisen tuloksen pieniä murtolausekkeita sanotaan **osamurroiksi**.
Ne ovat alkuperäistä jakojäännöstä yksinkertaisempia ja siksi käyttökelpoisempia esimerkiksi integroitaessa ja sähkötekniikan Laplace-muunnoksia käsiteltäessä. Osamurtojen nimittäjät ovat alkuperäisen jakajapolynomin tekijöitä ja myös osamurtojen osoittajat löydetään käsin laskien määräämättömien kertoimien menetelmällä.

Harjoitustehtäviä

2.4.1 Sievennä **v1)** $3x(4x+2)-4(x^2+2x-3)$ **v2)** $(2x^3+3x-4)(2x^2+5)$
a) $x^2(2x^2+3)-2x(x^3+2x+3)$ **b)** $(3x^2-2x+1)(x^2+4x)$

2.4.2 **v)** Etsi viidennen asteen polynomit, joiden summa on neljättä astetta.
a) Etsi kolmannen asteen polynomit, joiden erotus on toista astetta.
b) Etsi neljännen asteen polynomit, joiden summa on toista astetta.

2.4.3 Määritä polynomien $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$, $P(x)\cdot Q(x)$ ja $(\mathrm{P(x)})^3$ asteluvut, kun polynomien $P(x)$ ja $Q(x)$ asteluvut ovat
v1) 5 ja 4 **v2)** 3 ja 3 **a)** 3 ja 5 **b)** 4 ja 4.

2.4.4 Mitä tiedät osamäärän ja jakojäännöksen asteluvusta, kun
v1) 5. asteen polynomi jaetaan 3. asteen polynomilla,
v2) 7. asteen polynomi jaetaan 7. asteen polynomilla,
v3) 3. asteen polynomi jaetaan 7. asteen polynomilla,
a) 6. asteen polynomi jaetaan 4. asteen polynomilla,
b) 3. asteen polynomi jaetaan 3. asteen polynomilla,
c) 1. asteen polynomi jaetaan 2. asteen polynomilla.

2.4.5 Esitä jaettavan, jakajan, osamäärän ja jakojäännöksen välinen identiteetti sanallisesti. Tutki sitten, toteutuuko kyseinen identiteetti seuraavissa jakolaskuissa. Onko jakolasku suoritettu oikein?

v) $\dfrac{12x^2+7x-5}{3x+1}=4x-\dfrac{6}{3x+1}$ **a)** $\dfrac{3x^3+x+1}{x^2+1}=3x-\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

2.4.6 **v)** Määritä sellainen polynomi $P(x)$, että osamäärä on $3x+1$ ja jakojäännös $2x-1$, kun $P(x)$ jaetaan polynomilla $2x^2-3$.
a) Määritä sellainen polynomi $Q(x)$, että osamäärä on x^2+3 ja jakojäännös $5x+3$, kun $Q(x)$ jaetaan polynomilla $2x^3+4$.

2.4.7 Etsi sekä määräämättömien kertoimien menetelmällä että laskimella osamäärä ja jakojäännös, kun
v1) polynomi $6x+5$ jaetaan polynomilla $2x-4$
v2) polynomi $3x^2+2x+1$ jaetaan polynomilla $x+3$
v3) polynomi $5x^4+3x^2+1$ jaetaan polynomilla x^2+2x+3
v4) polynomi x^5+x^2 jaetaan polynomilla x^3+2x^2+3x+4 .
a) polynomi $4x^3$ jaetaan polynomilla $2x+3$
b) polynomi $12x^2+3x-7$ jaetaan monomilla $3x$
c) polynomi $6x^3+2x$ jaetaan polynomilla $2x^2+1$
d) polynomi $2x^4+3x^2+1$ jaetaan polynomilla x^4+2x^3 .

2.4.8 Etsi määräämättömien kertoimien menetelmällä sellaiset kertoimet *A* ja *B*, että

v) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ **a)** $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+3)}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}$

Opastus: Kerro yhtälöstä nimittäjät pois ja vertaa vasemman ja oikean puolen polynomien vastinkertoimia, jolloin saat yhtälöryhmän tuntemattomien kertoimien määrittämiseksi.

2.5 Neliöksi täydentäminen

Jokainen toisen asteen polynomi $ax^2 + bx + c$ voidaan **neliöidä (täydentää neliöksi**, englanniksi complete the square**)** eli esittää muodossa

$$A(x + B)^2 + C,$$

jossa on vain vakiotermi ja lausekkeen $x + B$ neliö vakiolla kerrottuna, mutta ei mitään muita termejä. Polynomin uusi esitys on monissa tilanteissa alkuperäistä muotoa käyttökelpoisempi.

Kertoimet *A, B* ja *C* saadaan esimerkiksi vertaamalla aukikerrotun uuden polynomin $Ax^2 + 2ABx + (AB^2 + C)$ kertoimia alkuperäisen polynomin $ax^2 + bx + c$ kertoimiin:

$$\begin{cases} A = a \\ 2AB = b \\ AB^2 + C = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = a \\ B = \dfrac{b}{2a} \\ C = c - \dfrac{b^2}{4a} \end{cases}$$

joten

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}) \quad .$$

Uusille kertoimille *A, B* ja *C* johdettujen kaavojen muistamisen ja käyttämisen asemasta kyseiset kertoimet kannattaa määrittää suoraan vasemmanpuoleisesta yhtälöryhmästä, jonka voi muodostaa vertaamalla alkuperäisen polynomin ja aukikerrotun neliöidyn polynomin vastinkertoimia kuten edelläkin.

Esimerkki. Täydennetään lauseke $P(x) = 1.23x^2 + 2.34x + 3.45$ neliöksi. Vertaamalla vastinkertoimia identiteetissä

$$1.23x^2 + 2.34x + 3.45 \equiv A(x + B)^2 + C \equiv Ax^2 + 2ABx + (AB^2 + C)$$

saadaan seuraava yhtälöryhmä, mistä ratkaistaan tuntematon kerrallaan ylhäältä alas edeten

$$\begin{cases} A = 1.23 \\ 2AB = 2.34 \\ AB^2 + C = 3.45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1.23 \\ B = 2.34/(2A) = 0.95122 \\ C = 3.45 - AB^2 = 2.3371 \end{cases} .$$

Niinpä $P(x) = 1.23(x + 0.95122)^2 + 2.3371$.

Huomautus. Kätevimmin toisen asteen polynomin saa tietenkin neliöityä tehokkailla symbolisen laskennan apuvälineillä. Esimerkiksi laskimella TI-Nspire CX CAS edellinen neliöinti suoritetaan komennolla

$$\text{completeSquare}(1.23x^2 + 2.34x + 3.45, x)$$

Huomautus. Toisen asteen polynomin ax^2+bx+c voi neliöidä myös muokkaamalla polynomia kohden tavoitemuotoa $A(x+B)^2+C$ viidessä vaiheessa, joissa jokaisessa polynomin arvon tulee säilyä muuttumatta. Muokkauksen vaiheet esitetään seuraavassa ja ne on helppo ymmärtää ja muistaa, **kun ajattelee lopputuloksen muotoa $A(x+B)^2+C$, johon näillä vaiheilla pyritään**.

Neliöinnin voi suorittaa käsinkin ilman kaavoja seuraavin vaihein:

1) Otetaan johtavan termin kerroin *a* (vaikka väkisin) *x*-termeistä sulkeitten eteen tekijäksi *A* ja vakiotermi jätetään sulkeitten ulkopuolelle.

Seuraavissa vaiheissa sulkulausekkeesta muokataan lauseke $(x+B)^2$, joka aukikerrottuna on $x^2+2xB+B^2$

2) Kirjoitetaan sulkeiden sisällä oleva *x*:n ensimmäisen asteen termi kaksinkertaiseksi sekatuloksi *x*:stä ja *x*:n kertoimen puolikkaasta.
3) Lisätään sulkeiden sisään mainitun kertoimen puolikkaan neliö.
4) Jotta koko lausekkeen arvo säilyisi ennallaan, niin sulkeiden ulkopuolella on vähennettävä edellä lisätty neliö johtavan termin kertoimella kerrottuna.
5) Sulkulauseke voidaan lopuksi muokata haluttuun muotoon kaavalla $x^2+2xB+B^2=(x+B)^2$.

Esimerkki. Määritä lausekkeen $3x^2+15x+2$ pienin arvo.

Tapa 1) Suoritamme ensin neliöinnin suorittaen edellä esitetyt viisi vaihetta, joiden numerot on merkitty kuhunkin vaiheeseen liittyvän yhtäsuuruusmerkin yläpuolelle. **Huomaa jokaisessa vaiheessa takaperin laskien varmistaa, että uusi muoto on aina edellisen suuruinen.**

$$\begin{aligned}
3x^2+15x+2 &\overset{1)}{=} 3(x^2+5x)+2\\
&\overset{2)}{=} 3\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}\right)+2\\
&\overset{3,4)}{=} 3\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-3\left(\frac{5}{2}\right)^2+2\\
&\overset{5)}{=} \underbrace{3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}_{\geq 0 \text{ kaikilla } x\text{:n arvoilla}}-\frac{67}{4}
\end{aligned}$$

Lausekkeen pienin arvo on $\underline{\underline{-67/4}}$ ja se saadaan, kun $x=-5/2$.

Tapa 2) Syötteellä completeSquare($3x^2+15x+2$,x) TI-laskin antaa tuloksen $3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{67}{4}$, josta nähdäänkin välittömästi lausekkeen pienin arvo.

Tapa 3) Suoritamme neliöinnin vielä aluksi esitetyillä kaavoilla:

Koska nyt $a=3$, $b=15$ ja $c=2$, niin

$$A=a=3\,,\quad B=\frac{b}{2a}=\frac{15}{2\cdot 3}=\frac{5}{2}\quad \text{ja}\quad C=c-\frac{b^2}{4a}=2-\frac{15^2}{4\cdot 3}=-\frac{67}{4}\,.$$

Neliöksi täydennetty lauseke on siis $A(x+B)^2+C=3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{67}{4}$.

Esimerkki. Täydennetään yleinen toisen asteen polynomi neliöksi edellä esitetyin vaihein:

$$ax^2+bx+c\overset{1)}{=}a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

$$\overset{2,3,4)}{=}a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\substack{\text{lisätty } a\text{:lla}\\ \text{kerrottava termi}}}\right)\underbrace{-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\substack{\text{vähennetty sama}\\ a\text{:lla kerrottu termi}}}+c$$

$$\overset{5)}{=}a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Näin saimme saman lopputuloksen kuin aiemmasta yhtälöryhmästäkin olemme jo saaneet.

Sovellus. Johdetaan toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$ ratkaisukaava.

Jakamalla tarkasteltava yhtälö johtavan termin kertoimella a saadaan

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\,.$$

Neliöidään sitten yhtälön vasen puoli edellä esitetyin vaihein 2 – 5).

2 – 4) $\quad\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

5) $\quad\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ | Siirretään vakiotermit yhtälön oikealle puolelle

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$ | Lavennetaan oikean puolen termit samannimisiksi ja lasketaan yhteen

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ | Oletetaan, että b^2-4ac ≥ 0 , jolloin siitä voidaan ottaa neliöjuuri

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | Ratkaistaan x siirtämällä vakiotermi oikealle

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,,\ \text{jos}\ b^2-4ac\geq 0}$$

Harjoitustehtäviä

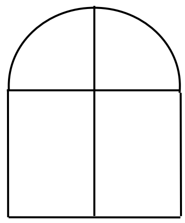
2.5.1 Neliöi mahdollisimman monella eri tavalla polynomi
v) $2x^2+4x-1$ **a)** $-2x^2+8x+3$ **b)** $2t^2+6t-4$

2.5.2 Määritä neliöimällä seuraavien lausekkeiden suurin/pienin arvo. Milloin se saadaan?
v1) $2x^2+x+1$ **v2)** $-2x^2-3y^2+4x-12y+7$
a) $-3x^2+8x-4$ **b)** $1.2x^2+2.3x-3.4$ **c)** $2x^2+3y^2-6x+12y+4$

2.5.3 Kuinka suuri suorakulmion muotoinen laidun voidaan aidata **v)** 300 metrillä **a)** 600 metrillä piikkilankaa, kun yksi suorakulmion sivuista on aidattava kaksinkertaisella langalla ja muut sivut yksinkertaisella? Derivaattaa ei saa nyt hyödyntää. Lähtötiedot tunnetaan kolmen numeron tarkkuudella.

2.5.4 Kuinka suuri suorakulmion muotoinen laidun voidaan aidata joen rannalle 200 metrillä lankaa, kun rannalle ei laiteta lankaa ja
v) muut kolme sivua aidataan yksinkertaisella langalla
a) toinen joen suuntainen sivu aidataan yksinkertaisella langalla ja muut sivut kaksinkertaisella langalla.
Derivaattaa ei saa käyttää. Anna vastaus 3 numeron tarkkuudella.

2.5.5 Kuvan mukaisen kaari-ikkunan yläosa on r-säteinen puoliympyrä ja alaosa suorakulmio mitoiltaan $2r \times h$. Määritä ikkunan suurin mahdollinen ala, kun ikkunan piiri on **v)** 600 cm **a)** 900 cm kolmen numeron tarkkuudella. Derivaattaa ei saa nyt hyödyntää. Neliöinnin voit suorittaa laskimella.



2.5.6 Tarkoituksesi on valmistaa Vempaimia, joita pyritään myymään tuhannelle vanhanmallisen Vimpaimen omistajalle. Jos Vempaimia valmistetaan n kappaletta, niin tuotanto- ja myyntikustannukset ovat $(100000+3000n)$ euroa, sillä tuotannon käynnistäminen maksaa 100000 € ja jokaisen Vempaimen valmistus maksaa lisäksi 3000 €. Markkinatutkimuksessa on selvinnyt, että jos Vempaimen veroton myyntihinta on H euroa, missä $4000 \le H \le 6500$, niin $2600-0.4H$ Vimpaimen omistajaa ostaa tilalle uuden Vempaimen. (Ts. jos $H=4000$, niin kaikki 1000 Vimpaimen omistajaa ostavat Vempaimen, ja jos $H=6500$, niin yksikään ei enää osta Vempainta). Tutki laskimella neliöiden, miten veroton hinta H on valittava maksimoitaessa voittoa

$$\begin{aligned} V &= \text{tulot} - \text{menot} \\ &= (2600-0.4H)\cdot H - \big(100000+3000(2600-0.4H)\big) \end{aligned}$$

2.5.7 Ratkaise sekä laskimella että toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla
v) $2x^2-5x-3=0$ **a)** $x^2+4x-5=0$ **b)** $x^2-6x=0$

3. KOMPLEKSILUVUISTA

Määritelmä. Olkoon **imaginaariyksikkö** i nimensä mukaisesti sellainen keksitty ”luku”, joka toteuttaa ehdon

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

Lukusuoralla olevien reaalilukujen joukosta me emme voi tietenkään löytää imaginaariyksikköä i, sillä jokaisen reaaliluvun neliö on tunnetusti ≥ 0 .

Määritelmä. **Kompleksiluvut** ovat muotoa $a + bi$ olevia kirjoitelmia, missä i on imaginaariyksikkö sekä a ja b ovat tavallisia reaalilukuja.
Kompleksiluvuilla lasketaan kuten tavallisilla kirjainlausekkeilla ottaen tarvittaessa huomioon, että $i^2 = -1$.

Esimerkki. $(4+2i)+(3+i) = (4+3)+(2+1)i = 7+3i$

$(4+2i)-(3+i) = (4-3)+(2-1)i = 1+i$

$(4+2i)(3+i) = 12+4i+6i+2i^2 = (12-2)+(4+6)i = 10+10i$

$(4+2i)^2 = 4^2+2\cdot 4\cdot 2i+(2i)^2 = 16+16i+4i^2 = 12+16i$

$i^5 = i^2\cdot i^2\cdot i^1 = (-1)\cdot(-1)\cdot i = i$

Huomautus. Reaaliluvutkin ovat kompleksilukuja, sillä ne ovat kompleksilukujen yleistä muotoa $a+bi$, missä nyt $b=0$.

Imaginaariluku on muotoa $a+bi$ oleva kompleksiluku, missä $b \neq 0$.

Puhdas imaginaariluku on muotoa bi oleva kompleksiluku.

Määritelmä. Kompleksiluvun $a+bi$ **liittoluku** on $a-bi$.

Lause. Kompleksiluvun ja sen liittoluvun tulo on reaalinen.

Todistus. Kompleksiluvun $a+bi$ ja sen liittoluvun tulo on

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$$

mikä reaalilukujen neliöiden summana on reaalinen ja vieläpä ei-negatiivinen.

Huomautus. Edellistä lausetta voidaan käyttää hyväksi sievennettäessä kahden kompleksiluvun osamäärää. Jos näet **osamäärä lavennetaan nimittäjän liittoluvulla**, niin nimittäjään tulee laventamisen jälkeen liittolukujen tulo, joka on reaalilukuna yksiterminen monomi, jolla on helppo suorittaa jakolasku.

Esimerkki. $\dfrac{4+2i}{3+5i}=\dfrac{(4+2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\dfrac{12-20i+6i-10i^2}{9-25i^2}$

$$=\frac{12-14i+10}{9+25}=\underline{\underline{\frac{22-14i}{34}=\frac{22}{34}-\frac{14i}{34}=0.647-0.412i}}$$

Kaikissa edellä olleissa esimerkeissä kompleksiluvuista muodostunut lauseke voitiin sieventää yhdeksi muotoa $a+bi$ olevaksi kompleksiluvuksi, jossa ei enää esiinny yhtään kompleksilukujen laskutoimitusta kuten potenssiinkorotusta tai jakolaskua. Tämä pitää paikkansa yleisestikin:

Huomautus. Jokainen kompleksiluvuista ja peruslaskutoimituksista ($+, -, \bullet, /, \hat{}$) muodostuva kompleksilukulauseke voidaan sieventää yksikäsitteiseksi muotoa $a+bi$ olevaksi kompleksiluvuksi.

Huomautus. Kompleksilukuja voi käsitellä myös laskimilla.

Huomaa, että laskimen tavallinen kirjain i ei tarkoita imaginaariyksikköä.

Koska kompleksiluvuilla on nyt esitetyn suorakulmaisen (engl. rectangular) summamuodon lisäksi myös myöhemmin tarkasteltava napakoordinaattimuotoinen (polar) esitysmuoto, niin laskimen kompleksilukuja koskeva tila-asetus on valittava kulloiseenkin tilanteeseen sopivaksi (kurssin tässä vaiheessa valitse kompleksilukuasetukseksi suorakulmainen eli rectangular).

Esimerkki. Totea laskimellasi oikeaksi seuraava kompleksilukulausekkeen sievennys

$$\frac{(1+2i)^3(3-4i)^2}{(3+4i)^2}=\frac{6469}{625}-\frac{2642}{625}i\approx 10.35-4.23i$$

Huomautus. Kompleksilukuja käytetään esimerkiksi fysiikan ja tekniikan jaksollisten ilmiöiden käsittelyssä. Niinpä värähtelyjen ja vaihtosähkösuureiden laskut suoritetaan kompleksilukujen avulla.
Sähkötekniikassa imaginaariyksikön tunnuksena on kuitenkin tavallisesti kirjain *j*, koska sähkötekniikassa *i* tarkoittaa virranvoimakkuutta.

Harjoitustehtäviä

3.1.1 Sievennä sekä käsin että laskimella laskien seuraavat kompleksiluvuista muodostuvat lausekkeet

v1)	$(2+3i)+(3+2i)$	**v2)**	$(2+3i)-(3+2i)$	**v3)**	$(2+3i)\cdot(3+2i)$
v4)	$\dfrac{2+3i}{3+2i}$	**v5)**	$(2+3i)^2$	**v6)**	i^7
a)	$(4-i)+(1+2i)$	**b)**	$(4-i)-(1+2i)$	**c)**	$(4-i)\cdot(1+2i)$
d)	$\dfrac{4-i}{1+2i}$	**e)**	$(1+2i)^3$	**f)**	i^9

3.1.2 Selvitä, miten kompleksilukujen osamäärää voi sieventää.

3.1.3 Laske imaginaariyksikön potensseja i^k, kun $k=0,1,2,...$
Päättele sitten potenssin arvo niissä tapauksissa, joissa k on muotoa $4m$, $4m+1$, $4m+2$ tai $4m+3$, missä m on (positiivinen tai negatiivinen) kokonaisluku.

3.1.4 Sievennä seuraavat kompleksilukulausekkeet mahdollisimman monin eri tavoin sekä käsin laskien että laskinta hyödyntäen. Kohdissa **v4**, **d** ja **e** voit kokeilla myös laskimen summa- ja tulo-operaatioita muodostaen seuraavanlaiset syötteet tulolle $\prod_{k=0}^{20}\left(i^k\right)$ ja summalle $\sum_{k=0}^{400}\left(i^k\right)$ sopivien lausekemallien avulla tai yksirivisinä syötteinä muodossa $\Pi(i \wedge k,k,0,20)$ tai $\sum(i \wedge k,k,0,400)$.

v1)	$1+i+i^2+i^3+i^4$	**v2)**	$(1+2i+3i^2)(4-5i+4i^2)$
v3)	$i^{2005}+2i^{2006}$	**v4)**	$i^0\cdot i^1\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{18}\cdot i^{19}\cdot i^{20}$
a)	$i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$	**b)**	$(i-2i^2+3i^3)(i-2i^3+3i^5)$
c)	$i^{999}-3i^{1002}$	**d)**	$i^0\cdot i^1\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{28}\cdot i^{29}\cdot i^{30}$
e)	$i^0+i^1+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{398}+i^{399}+i^{400}$		

3.1.5 Millä luvulla kompleksiluku $5-2i$ on kerrottava, jotta tulo olisi reaalinen? Löydätkö muita lukuja, joilla kertomalla luvusta $5-2i$ saadaan reaalinen?

3.1.6 Millä luvulla kompleksiluku $7+2i$ on kerrottava, jotta tulo olisi puhdas imaginaariluku eli muotoa bi ?
Opastus: Kerro luku ensin sellaisella luvulla, että tulo on reaalinen. Sen jälkeen kerrot saadun reaaliluvun sellaisella luvulla, että tulo on haluttua muotoa. Kertomalla löytämäsi kertojat keskenään olet löytänyt yhden etsityn luvun. Keksitkö muita ehdon täyttäviä lukuja?

4. POTENSSI- JA JUURIOPPIA

4.1 Kokonaispotenssi

Kertaamme aluksi **kokonaispotenssin** määritelmän ja laskulait.

Määritelmä. Olkoon a mielivaltainen reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}} .$$

Jos lisäksi $a \neq 0$, niin määritellään edelleen

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esimerkki. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $5^0 = 1$, $(-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16}$

$-2^4 = -(2^4) = -16$, 0^0 ja 0^{-2} eivät ole määritellyt .

Edellä määritellylle kokonaispotenssille on voimassa tutut laskulait:

Lause. Olkoot a ja b mielivaltaisia reaalilukuja (tarvittaessa $\neq 0$) sekä m ja n kokonaislukuja. Silloin

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Samankantaiset potenssit kerrotaan keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen.
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten, että eksponentit vähennetään.
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Tulo korotetaan potenssiin siten, että kukin tekijä erikseen korotetaan kyseiseen potenssiin.
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Osamäärä korotetaan potenssiin siten, että osoittaja ja nimittäjä erikseen korotetaan potenssiin.
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	Potenssin potenssi lasketaan kertomalla eksponentit keskenään.

Huomautus. Edellä esitetty kokonaispotenssin määritelmä ja edellisen lauseen mukaiset laskulait ovat voimassa myös silloin, kun kantaluvut a ja b ovat (tarvittaessa nollasta eroavia) kompleksilukuja.

Esimerkki. Havainnollistetaan lauseen laskulakeja seuraavilla esimerkeillä:

$$a^4 \cdot a^2 = (aaaa)(aa) = aaaaaa = a^6 = a^{4+2}$$

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\ a\ a\ a\ a}{a\ a\ a}^{\text{(Supista } aaa} = a\ a = a^2 = a^{5-3}$$

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (aaa)(bbb) = a^3b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\ a\ a}{b\ b\ b} = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\left(a^2\right)^3 = (a^2)(a^2)(a^2) = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2\cdot 3}$$

Huomautus. Edellisen lauseen tulokset ovat voimassa vain kerto- ja jako-laskulle, niitä ei voi yleistää yhteen- ja vähennyslaskuun.

Esimerkki. $a^4 + a^2 = a^2(a^2+1)$ ei voi sieventää pidemmälle, mutta $a^4 + a^4 = 2a^4$ ja $7a^3 + 2a^3 = 9a^3$

$a^5 - a^3 = a^3(a^2-1)$ ei voi sieventää pidemmälle, mutta $a^5 - a^5 = 0$ ja $7a^3 - 2a^3 = 5a^3$

$(a+b)^3$ ei ole $a^3 + b^3$, vaan

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(aa+ab+ba+bb)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

4.1.1 Sievennä sekä käsin että laskimella ne seuraavista lausekkeista, jotka pystyt sieventämään $4a^3 - 3a^2$, $\dfrac{12a^6}{3a^2}$, $6a^7 \cdot 8a^9$, $\dfrac{(2a^3)^4}{(4a^2)^3}$

4.1.2 Olkoon $a = 9.8\cdot 10^{9876}$, $b = 7.6\cdot 10^{1234}$, $c = 6.0\cdot 10^{5000}$, $d = 2.0\cdot 10^{3000}$
Laske sopivalla tarkkuudella
v) vaikka laskinta hyödyntäen likiarvolaskut $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$ ja a/b
a) päässälaskuna likiarvolaskut $c+d$, $c-d$, $c\cdot d$ ja c/d

4.2 Neliö- ja kuutiojuuri sekä yleinen *n*. juuri reaalialueella

Seuraavassa määrittelemme (reaalisen) *n.* juuren vaiheittain.

Määritelmä. Olkoon reaaliluku $a \geq 0$. Silloin a:n **neliöjuuri** $\sqrt{a}$ tarkoittaa sitä ei-negatiivista lukua, jonka neliö on a ts. $\sqrt{a} \geq 0$ ja $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Esimerkki. $\sqrt{4} = 2$, sillä $2 \geq 0$ ja $2^2 = 4$.
Huomaa, että vaikka yhtälöllä $x^2 = 4$ on kaksi juurta +2 ja -2, niin (reaalisen) **neliöjuuren arvoksi näistä hyväksytään vain ei-negatiivinen arvo.**

Esimerkki. $\sqrt{-9}$ ei ole määritelty reaalialueella.

Esimerkki. $\sqrt{x^8} = x^4$, sillä $x^4 \geq 0$ ja $\left(x^4\right)^2 = x^8$.

Esimerkki. Emme voi kirjoittaa, että $\sqrt{x^2} = x$, sillä emme tiedä, onko $x \geq 0$.
Oikein on sen sijaan kirjoittaa

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ , sillä } |x| \geq 0 \text{ ja } |x|^2 = x^2 .$$

Lause. Jos a ja b ovat positiivisia, niin **tulo- ja osamäärälausekkeille** on voimassa juurikaavat

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Esimerkki. $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

$$\sqrt{16x^4y^8} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y^8} = 4x^2y^4$$

Huomautus. Esitettyjä juurikaavoja ei voi muokata koskemaan yhteen- ja vähennyslaskua.

Esimerkki. Lausekkeita $\sqrt{a^2 + b^2}$ ja $\sqrt{a^2 - b^2}$ ei voi sieventää.

Huomautus. Aikaisemmin on murtolausekkeiden nimittäjistä poistettu neliöjuuret laventamalla nimittäjän "liittoluvulla" seuraavasti:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$$

Ennen laskimien käyttöön tuloa oli paljon mukavampi jakaa kokonaisluvulla 7 kuin alkuperäisen nimittäjän desimaaliesityksellä 1.585786…
Historiallisena jäänteenä laskimet edelleenkin rationalisoivat murtolausekkeen nimittäjän, vaikka siihen ei olisi enää todellista tarvetta. Teoreettisesti on kuitenkin kiintoisaa havaita, että tässä nimittäjän rationalisoinnissa on kyseessä sama menettelytapa kuin kompleksilukujenkin jakolaskussa.

Esimerkki. Tiedetään, että $\sqrt{5} \approx 2.2360679774998$. Määritä käsin laskien $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ kolmentoista desimaalin tarkkuudella.

Murtolauseke kannattaa laventaa nimittäjän $3-\sqrt{5}$ "liittoluvulla" $3+\sqrt{5}$, jotta nimittäjään saadaan erotuksen ja summan tulo, joka voidaan kaavaa $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ käyttäen korvata neliöitten erotuksella, jolloin nimittäjästä häviää neliöjuuri ja sen mukana ikävät desimaalit:

$$^{3+\sqrt{5})}\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3+2.2360679774998}{2} = \frac{5.2360679774998}{2} = 2.6180339887499$$

Määritelmä. Reaaliluvun a **kuutiojuuri** $\sqrt[3]{a}$ tarkoittaa sitä lukua, jonka kuutio on a.

Esimerkki. $\sqrt[3]{125} = 5$, sillä $5^3 = 125$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, sillä $(-2)^3 = -8$
$\sqrt[3]{x^3} = x$, sillä $x^3 = x^3$.

Lause. Tulo- ja osamäärälausekkeille on jälleen voimassa juurikaavat

$$\sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad ,$$

jos nimittäjässä $b \neq 0$.

Huomautus. Seuraavassa yleinen *n*. juuri määritellään reaalialueella kahdessa vaiheessa riippuen juuren indeksin parillisuudesta tai parittomuudesta.

Määritelmä. Olkoon a mielivaltainen reaaliluku ja n ***pariton*** positiivinen kokonaisluku 3, 5, 7, … Silloin luvun a ***n*:s juuri** $\sqrt[n]{a}$ tarkoittaa sitä lukua, jonka *n.* potenssi on a .

Esimerkki. $\sqrt[9]{512} = 2$, sillä $2^9 = 512$.
$\sqrt[5]{-100000} = -10$, sillä $(-10)^5 = -100000$.

Määritelmä. Olkoon a ei-negatiivinen reaaliluku ja n ***parillinen*** positiivinen kokonaisluku 2, 4, 6, … Silloin luvun a ***n*:s juuri** $\sqrt[n]{a}$ tarkoittaa sitä *ei-negatiivista* lukua, jonka n. potenssi on a.

Esimerkki. $\sqrt[4]{16} = 2$, sillä $2 \geq 0$ ja $2^4 = 16$. $\sqrt[6]{-64}$ ei ole määritelty

Esimerkki. Emme voi kirjoittaa $\sqrt[4]{x^4} = x$, sillä emme tiedä x:n merkkiä. Sen sijaan on oikein merkitä $\sqrt[4]{x^4} = |x|$.

Lause. Yleiselle n. juurelle on voimassa aikaisempia vastaavat juurikaavat

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

jos nimittäjä eroaa nollasta ja juurrettavat ovat tarvittaessa positiivisia.

Huomautus. Perinteellisesti juurilausekkeita on sievennetty siirtämällä juuren alta juuren eteen mahdollisimman monia tekijöitä**,** esimerkiksi

$$\sqrt[3]{16a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{8a^3b^3 \cdot 2ac^2} = \sqrt[3]{8a^3b^3} \cdot \sqrt[3]{2ac^2} = 2ab \cdot \sqrt[3]{2ac^2} .$$

Huomautus. Edellä on tarkasteltu ns. **reaalista *n*. juurta**, jolla on enintään yksi arvo. Geometrian kurssissa määriteltävällä mielivaltaisen (reaalisen tai imaginaarisen) luvun z **kompleksisella *n*. juurella** tarkoitetaan mitä tahansa kompleksilukua, jonka *n.* potenssi on *z.* Tulemme näkemään, että jokaisen nollasta eroavan luvun kompleksisella *n*. juurella on *n* erisuurta arvoa.

Harjoitustehtäviä

4.2.1 Sievennä käsin ja laskimella **v)** $\sqrt[5]{x^{15}}$, $\sqrt[6]{\dfrac{a^{18}b^{12}}{a^6+b^{18}}}$, $\sqrt[3]{8a^6b^9(c^6+d^{12})}$

a) $\sqrt[3]{x^{12}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^8}{z^4+u^8}}$, $\sqrt[5]{32s^{10}t^5(u^{15}-v^5)}$

olettaen, että kaikki muuttujat ovat (i) positiivisia (ii) negatiivisia.

4.2.2 Rationalisoi käsin ja laskimella seuraavien murtolausekkeiden nimittäjä

v) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ **a)** $\dfrac{7}{4+\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

4.3 Murtopotenssi

Reaaliluvun **murtopotenssi** (eli reaaliluvun korottaminen murtolukuun) määritellään seuraavasti.

Määritelmä. Olkoot m ja n kokonaislukuja, joista ainakin n on positiivinen. Määritellään

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m} \quad ,$$

missä kantaluvun a on tarvittaessa oltava ei-negatiivinen tai positiivinen.

Esimerkki. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$$16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4096}} = \frac{1}{8}$$

tai toisin $16^{-\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{-3} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

Huomautus. Joissakin vanhemmissa laskimissa yleinen juuri on ehkä laskettava murtopotenssia käyttäen ja yhdelle riville kirjoittaen. Esimerkiksi $\sqrt[3]{-8}$ kirjoitetaan tällöin sulkeita käyttäen muodossa (−8)^(1/3) .

Harjoitustehtävä

4.3.1 Sievennä sekä käsin että laskimella

v) $32^{-\frac{2}{5}}$, $10000000^{\frac{3}{7}}$, $(a^6+b^9)^{-\frac{1}{3}}$ **a)** $8^{\frac{5}{3}}$, $1000000^{-\frac{2}{3}}$**,** $16^{-\frac{5}{2}}$**,** $(a^4+b^8)^{-\frac{1}{2}}$

Kirjoita laskimen syöte sekä yksirivisenä että lausekemallien avulla.

4.4 Irrationaalipotenssi

Positiivisen reaaliluvun irrationaalinen potenssi voidaan määritellä sopivien murtopotenssien raja-arvona seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki. Tiedetään, että $\sqrt{2} = 1.41421...$ Tarkastellaan lauseketta $8^{\sqrt{2}}$, jolle saadaan seuraavia likiarvoja:

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1} = 8$$

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1.4} = 8^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{8^{14}} = 18.3791...$$

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1.41} = 8^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{8^{141}} = 18.7653...$$

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1.414} = \sqrt[1000]{8^{1414}} = 18.9220...$$

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1.4142} = \sqrt[10000]{8^{14142}} = 18.9299...$$

$$8^{\sqrt{2}} \approx 8^{1.41421} = \sqrt[100000]{8^{141421}} = 18.9303...$$

Jatkamalla menettelyä todetaan, että likiarvot vakiintuvat kohden arvoa 18.93050…, joka määritelläänkin tarkasteltavan potenssilausekkeen arvoksi. Käytännössä luvun irrationaalinen potenssi lasketaan kuitenkin suoraan laskimella ilman mitään laskijan omia raja-arvotarkasteluja.

Sekä murtopotenssi että irrationaalipotenssi noudattavat samoja laskulakeja kuin kokonaispotenssikin:

Lause. Olkoot a, b, r ja s mielivaltaisia reaalilukuja (tarvittaessa $a,b > 0$). Silloin

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Esimerkki. $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}} = \sqrt{2}^{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}^{6} = \left(\sqrt{2}^{2}\right)^{3} = 2^3 = 8.$

Saman tuloksen saat tietenkin myös suoraan laskimella.

5. PROSENTTILASKUJA

Prosentti (%) tarkoittaa sadasosan suhteellista osuutta jostakin kokonaisuudesta.
Promille (‰) tarkoittaa tuhannesosan suhteellista osuutta jostakin kokonaisuudesta.
Lyhenne **ppm (part per million)** tarkoittaa miljoonasosan suhteellista osuutta jostakin kokonaisuudesta.

Seuraavassa esitetään aidattuina sellaisia lausekkeita, joiden arvoja kysytään usein prosenttilaskujen yhteydessä.

p prosenttia luvusta a on $\boxed{\frac{p}{100}\cdot a}$.

Luku a on $\boxed{\underbrace{\frac{a}{b}\cdot 100}_{\text{Laske}}\ \underset{\text{Lue: prosenttia}}{\%}}$ luvusta b.

Olkoot S ja p positiivisia lukuja, joista S on suurempi ja p pienempi. Silloin

- luku S on $\boxed{\underbrace{\frac{S-p}{p}\cdot 100}_{\text{Laske}}\ \underset{\text{Lue: prosenttia}}{\%}}$ suurempi kuin luku p
- luku p on $\boxed{\underbrace{\frac{S-p}{S}\cdot 100}_{\text{Laske}}\ \underset{\text{Lue: prosenttia}}{\%}}$ pienempi kuin S .

Edellisten kaavojen luku sata on tietenkin korvattava promillelaskuissa tuhannella ja ppm-laskuissa miljoonalla.

Esimerkki. Seitsemän prosentin alennus 1500 euron laskusta on

$$\frac{7}{100}\cdot 1500\ € = \underline{\underline{105\ €}}\ .$$

Esimerkki. Jos ilman tiheys on 1.21 kg/m^3 ja häkäpitoisuus 75 ppm, niin sadassa kuutiometrissä ilmaa on häkää

$$\frac{75}{1000000}\cdot\underbrace{100\ \mathrm{m}^3\cdot 1.21\ \mathrm{kg/m}^3}_{\text{ilman kokonaismassa}} = 0.0091\ \mathrm{kg} = \underline{\underline{9.1\ \mathrm{g}}}$$

Esimerkki. 12.30 euron alennus 112.30 euron laskusta on prosentteina

$$\frac{12.30}{112.30}\cdot 100\ \% = \underline{\underline{10.95\ \%}}$$

Esimerkki. Alkoholijuoman etanoli jakautuu tasaisesti koko elimistön nestemäärään. Miehen kehon nestemäärä on noin 75 % ruumiinpainosta (naisen 66%). Jos 80-kiloinen mies juo 120 g etanolia, niin hänen verensä alkoholipitoisuus on noin $\dfrac{120\text{ g}}{0.75\cdot 80000\text{ g}}\cdot 1000\text{ ‰} = \underline{\underline{2.0\text{ ‰}}}$.

Esimerkki. Jos tuotteen A hinta on 123 € ja B:n hinta 94 €, niin

a) tuote A on $\dfrac{123\text{ €} - 94\text{ €}}{94\text{ €}}\cdot 100\% = 30.9\%$ kalliimpi kuin B

b) tuote B on $\dfrac{123\text{ €} - 94\text{ €}}{123\text{ €}}\cdot 100\% = 23.6\%$ halvempi kuin A.

Tehtävissä, joissa jokin suure kasvaa tai vähenee tietyn prosenttimäärän, voit käyttää apuna **muutoskerrointa**.
Jos esimerkiksi hinta nousee 5 %, niin uusi hinta saadaan kertomalla vanha hinta **kasvukertoimella** 1.05 ($=1+5\%=1+5$ sadasosaa).
Jos hinta puolestaan laskee 23 %, niin uusi hinta saadaan käyttäen **vähennyskerrointa** 0.77 ($=1-23\%=1-23$ sadasosaa).

Koska *peräkkäisissä muutoksissa prosentuaaliset muutokset lasketaan aina kutakin muutosta välittömästi edeltäneestä arvosta*, niin **koko muutosprosessin yhdistetty muutoskerroin saadaan perättäisten muutoskertoimien tulona.**

Esimerkki. Jos palkat laskivat ensin 45 % ja sitten nousivat 70 %, niin yhdistetty muutoskerroin on

$$(1-45\%)\cdot(1+70\%) = (1-0.45)\cdot(1+0.70) = 0.55\cdot 1.7 = 0.935 = 1-6.5\ \% .$$

Muutosten jälkeinen palkka on siis 6.5 % pienempi kuin alkupalkka.

Saman laskun voi suorittaa myös vaiheittain: Olkoon alkupalkka *a*. Alennuksen jälkeen palkka on 0.55*a* ja korotuksen jälkeen palkka on $1.7\cdot(0.55a) = 0.935a$.
Tästä voidaankin päätellä yo tulos.

Huomaa erityisesti, että kokonaismuutosprosenttia ei voi laskea annettujen muutosprosenttien summana $-45\,\% + 70\,\% = 25\,\%$, koska nyt korotus lasketaan pienemmästä palkasta kuin vähennys.

Esimerkki. Lasketaan miljoonan euron sijoituksen arvo 350 pörssipäivän jälkeen, jos joka toinen päivä osakekurssi nousee 50 % ja joka toinen päivä laskee 40 % edellisen päivän kurssista.
Koska päivittäiset muutoskertoimet ovat 1.5 ja 0.6, niin sijoituksen loppuarvo on

$$1000\,000\text{€}\cdot 1.5\cdot 0.6\cdot\cdots\cdot 1.5\cdot 0.6 = 1000\,000\text{€}\cdot 1.5^{175}\cdot 0.6^{175} = 0.0098\text{€} \approx \underline{\underline{1\text{ snt}}}$$

Huomautus. Liuos- ja seoslaskuissa eri ainesosien pitoisuudet lasketaan prosenttiosuuksina *kokonais*määrästä.

Esimerkki. Paljonko suolaa on lisättävä 7.2 kilogrammaan vettä, jotta saadun liuoksen suolapitoisuus olisi 24 % ?

Olkoon lisättävän suolan massa x, joten liuoksen kokonaismassa on $7.2\text{ kg}+x$.

Lausutaan suolan massa toisinkin, jolloin saadaan yhtälö $x=\frac{24}{100}\cdot(7.2\text{ kg}+x)$.
Tämän yhtälön pyöristetty ratkaisu on $x=2.3\text{ kg}$.

Esimerkki. Astiassa on 12.3 kg sokeri-suola-liuosta, jonka sokeripitoisuus on 23.0 % ja suolapitoisuus 12.0 %. Paljonko liuokseen on lisättävä vettä ja suolaa, jotta saadun liuoksen sokeripitoisuus olisi 22.0 % ja suolapitoisuus 25.0 %.

Olkoon lisättävän veden määrä x kg ja lisättävän suolan määrä y kg.
Tarvittavat kaksi yhtälöä saadaan seuraavasti:

$$\begin{cases}\text{Sokerin massa lopullisessa liuoksessa}\\ \qquad =\text{sokerin massa alkuperäisessä liuoksessa}\\ \text{Suolan massa lopullisessa liuoksessa}\\ \qquad =\text{suolan massa alkuperäisessä liuoksessa}+\text{lisätyn suolan massa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0.22\cdot(12.3+x+y)=0.23\cdot 12.3\\ 0.25\cdot(12.3+x+y)=0.12\cdot 12.3+y\end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x=-1.180\\ y=1.739\end{cases}$$

Liuoksen valmistaminen ei siis onnistu vettä ja suolaa lisäämällä. Jos vettä haihdutetaan 1.18 kg ja suolaa lisätään 1.74 kg, niin saadaan haluttua liuosta.

Huomautus. Joissakin tilanteissa on tapana poiketa yleisestä käytännöstä.
Esimerkiksi puutavaran kosteusprosentti ilmoitetaan veden prosenttiosuutena kuivan puun painosta. Koska puu voi sisältää vettä enemmänkin kuin kuivapainonsa verran, niin vastasahatun puun kosteus voi olla jopa 200 %, katso www.puuinfo.fi .

Prosenttiyksikköä käytetään ilmoitettaessa **prosenttiosuuden muutosta.**

Esimerkki. Jos tietyn puolueen osuus äänistä edellisissä vaaleissa oli 23 % ja jälkimmäisissä 27 %, niin sanotaan, että puolueen ääniosuus nousi 4 prosenttiyksikköä. Äänimäärän muutos prosentteina riippuu prosenttiosuuksien lisäksi myös kokonaisäänimääristä. Jos kaikkien annettujen äänien määrä oli laskenut 3 000 000:sta 2 000 000:aan, niin puolueen äänimäärä olikin laskenut 690 000:sta 540 000:een eli laskua oli $\frac{690000-540000}{690000}\cdot 100\%\approx 22\%$.

Vaikka siis puolueen **ääniosuus nousi 4 prosenttiyksikköä**, niin samalla kuitenkin puolueen **äänimäärä laski 22 prosenttia**!

Harjoitustehtäviä

5.1 **v)** Montako prosenttia 1234 on suurempi kuin 53?
a) Montako prosenttia 4567 on suurempi kuin 890?

5.2 **v)** Montako prosenttia 53 on pienempi kuin 1234?
a) Montako prosenttia 543 on pienempi kuin 765?

5.3 Montako prosenttia 1234 on luvusta **v)** 2222 **a)** 3333 **b)** 1111?

5.4 **v)** Montako prosenttia tuote B on kalliimpi kuin tuote A, jos A on 88.8 % halvempi kuin tuote B?
a) Montako prosenttia tuote B on halvempi kuin tuote A, jos A on 88.8 % kalliimpi kuin tuote B?

5.5 Montako prosenttia keskinopeutta on lisättävä, jotta matkaan kuluva aika lyhenisi **v)** 15.00 % **a)** 35.00 % **b)** 95.00 % ?

5.6 Myyjän on nostettava tietyn tuotteen yksikköhintaa (litrahinta tai kilohinta) **v)** 15.0 % **a)** 35.0 % **b)** 175 %. Montako prosenttia hänen on pienennettävä pakkauskokoa, jos pakkauksen hinta pidetään ennallaan.

5.7 Montako prosenttia pienenee tuntipalkka, jos työaikaa lyhenee
v) 20 % samalla kun kokonaispalkkaa pienennetään 30 %
a**)** 10 % samalla kun kokonaispalkkaa pienennetään 20 %.

5.8 Montako prosenttia on vuosittain saatava korkoa talletukselle, jotta talletus kaksinkertaistuisi **v)** 10 **a)** 20 vuodessa?

5.9 Työharjoittelijan palkka sovittiin korotettavan kaksinkertaiseksi kolmessa vuodessa siten, että toisen vuoden korotusprosentti on puolet ensimmäisen vuoden korotusprosentista ja kolmannen vuoden korotusprosentti on kolmasosa ensimmäisen vuoden korotusprosentista. Kuinka suuret ovat vuosittaiset korotusprosentit?

5.10 **v)** Luku q on 54 % suurempi kuin luku p. Montako prosenttia luku p on pienempi kuin luku q?
a) Luku q on 54 % pienempi kuin luku p. Montako prosenttia luku p on suurempi kuin luku q.

5.11 Eräissä vaaleissa annettiin 1 235 000 ääntä vuonna 2010 ja 1 325 000 ääntä vuonna 2014. Puolueen A ääniosuus oli 22.00 % vuonna 2010. Montako prosenttia puolueen A äänimäärä kasvoi/väheni, jos A:n ääniosuus laski **v)** 0.50 **a)** 2.50 prosenttiyksikköä vuoden 2014 vaaleissa?

5.12 Jos puhdasta vettä sisältävään astiaan lisätään 1.00 kg suolaa, niin liuoksen suolapitoisuudeksi tulee 9.87 %. Mikä on kyseisen liuoksen lopullinen suolapitoisuus, jos siihen lisätään vielä 9 kertaa 1.00 kiloa suolaa.

6. VERRANNOLLISUUDESTA

Määritelmiä. Suure y on **(suoraan) verrannollinen** suureeseen x, jos on olemassa sellainen vakio k, että $y = k \cdot x$ kaikilla suureen x arvoilla.

Suure y on **kääntäen verrannollinen** suureeseen x, jos on olemassa sellainen vakio k, että $y = \frac{k}{x}$ kaikilla suureen x arvoilla ($x \neq 0$).

Suure y on **(suoraan) verrannollinen** suureen x n:nteen **potenssiin**, jos on olemassa sellainen vakio k, että $y = k \cdot x^n$ kaikilla suureen x arvoilla.

Suure y on **kääntäen verrannollinen** suureen x n:nteen **potenssiin**, jos on olemassa sellainen vakio k, että $y = \frac{k}{x^n}$ kaikilla suureen x arvoilla ($x \neq 0$).

Määritelmä. Edellisissä määritelmissä esiintynyttä kerrointa k sanotaan **verrannollisuuskertoimeksi**.
Huomaa, että verrannollisuuskerrointa ei saa ilman perusteita olettaa ykköseksi!

Huomautus. Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset, jos tulo xy saa vakioarvon k.

Esimerkkejä. Ympyrän piiri $p = 2\pi \cdot r$ on (suoraan) verrannollinen säteeseen r.

Kuution tilavuus $V = s^3$ on (suoraan) verrannollinen särmän s kolmanteen potenssiin eli kuutioon. Verrannollisuuskertoimena on nyt poikkeuksellisesti 1.

Vastuksen lämpöteho voidaan ilmoittaa eri tavoin: $P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$.
Esitystavasta riippuen voimme sanoa, että on syntyvä lämpöteho P on
- (suoraan) verrannollinen jännitteeseen U ja virran voimakkuuteen I
- (suoraan) verrannollinen vastuksen resistanssiin R ja virran I neliöön
- (suoraan) verrannollinen jännitteen U neliöön ja kääntäen verrannollinen vastuksen resistanssiin R.

Johdinlangan resistanssi $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ on verrannollinen johtimen pituuteen ja kääntäen verrannollinen langan poikkipinta-alaan verrannollisuuskertoimen ollessa johdinmateriaalin resistiivisyys.

Massapisteiden m_1 ja m_2 välinen vetovoima $F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ on (suoraan) verrannollinen massoihin m_1 ja m_2 sekä kääntäen verrannollinen massapisteiden välisen etäisyyden r neliöön. Verrannollisuuskertoimena on ns. gravitaatiovakio $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm^2 kg^{-2}}$.

Heilurin heilahdusaika $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ on (suoraan) verrannollinen heilurin pituuden l neliöjuureen eli potenssiin 1/2. Lisäksi heilahdusaika on kääntäen verrannollinen putoamiskiihtyvyyden neliöjuureen.

Huomautuksia. Seuraavissa toteamuksissa verrannollisuuskerroin k ja eksponentti n oletetaan positiivisiksi, kuten käytännössä tavallisesti onkin.

Jos suure y on suoraan verrannollinen suureeseen x, niin suureen x kasvaessa t-kertaiseksi myös y kasvaa t-kertaiseksi.

Jos y on kääntäen verrannollinen suureeseen x, niin suureen x kasvaessa t-kertaiseksi y pienenee $1/t$ osaan alkuperäisestä.

Jos y on suoraan verrannollinen suureen x n. potenssiin, niin suureen x kasvaessa t-kertaiseksi suure y kasvaa t^n -kertaiseksi.

Jos y on kääntäen verrannollinen suureen x n. potenssiin, niin suureen x kasvaessa t-kertaiseksi suure y pienenee $1/t^n$ -osaan alkuperäisestä.

Esimerkki. Koska vastuksen R lämpöteho $P = RI^2$ **, niin tietyn vastuksen** teho on verrannollinen virran I neliöön. Niinpä

- virran kaksinkertaistuessa kyseisen vastuksen lämpöteho nelinkertaistuu
- virran puolittuessa kyseisen vastuksen lämpöteho pienenee neljäsosaan.

Esimerkki. Koska säätövastuksen R lämpöteho $P = \frac{U^2}{R}$ **, niin tietyllä kiinteällä vakiojännitteellä** säätövastuksen teho on kääntäen verrannollinen vastuksen resistanssiin R. Niinpä

- resistanssin kaksinkertaistuessa ja jännitteen säilyessä teho puoliintuu
- resistanssin puolittuessa ja jännitteen säilyessä teho kaksinkertaistuu.

Esimerkki. Olkoon suure z suoraan verrannollinen suureeseen x ja kääntäen verrannollinen suureen y neliöön. Lisäksi tiedetään, että $z = 1.2$, kun $x = 3.4$ ja $y = 5.6$. Määritä z, kun $x = 3.3$ ja $y = 4.4$.

Oletuksen mukaan on olemassa sellainen vakio k , että $z = k \cdot \frac{x}{y^2}$.

Verrannollisuuskerroin saadaan tunnettujen arvojen avulla:

$$1.2 = k \cdot \frac{3.4}{5.6^2} \quad \Leftrightarrow \quad k = 11.0682 \ .$$

Kysytty z:n arvo on näin ollen $z = k \cdot \frac{x}{y^2} = 11.0682 \cdot \frac{3.3}{4.4^2} = 1.88663 \approx \underline{\underline{1.9}}$.

Harjoitustehtäviä

6.1 Tiedetään, että suure z riippuu kahdesta muusta suureesta siten, että

v) z on suoraan verrannollinen suureen x neliöön ja kääntäen verrannollinen suureen y kuutiojuureen

a) z on suoraan verrannollinen suureen x kuutiojuureen ja kääntäen verrannollinen suureen y neliöön.

Tiedetään, että $z = 2.34$, kun $x = 3.45$ ja $y = 4.56$. Määritä z, kun $x = 1.23$ ja $y = 5.67$.

6.2 Tiedetään, että kahden tyhjiössä olevan pistemäisen varauksen välinen voima on verrannollinen kummankin varauksen Q_1 ja Q_2 itseisarvoon ja kääntäen verrannollinen varausten välisen etäisyyden r neliöön.

v1) Miten voima muuttuu, kun kumpikin varaus ja niiden välinen etäisyys kaksinkertaistuvat?

v2) Miten voima muuttuu kun varaukset tulevat kolminkertaisiksi ja etäisyys pienenee puoleen alkuperäisestä?

a) Miten voima muuttuu, kun kumpikin varaus ja niiden välinen etäisyys puolittuvat?

b) Miten voima muuttuu, kun varaukset tulevat kaksinkertaisiksi ja etäisyys pienenee kolmasosaan alkuperäisestä?

c) Esitä voiman lauseke, kun verrannollisuuskerroin $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$**,** missä $\varepsilon_0 =$ tyhjiön permittiivisyys $= 8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$.

d) Laske varausten välinen voima, jos $Q_1 = Q_2 = 10$ nC ja $r = 4 \cdot 10^{-6}$ m.

6.3 Miten suure y on verrannollinen suureeseen x, jos

v1) aina suureen x kaksinkertaistuessa y kahdeksankertaistuu

v2) aina suureen x yhdeksänkertaistuessa y menee kolmasosaan

a) aina suureen x nelinkertaistuessa y puolittuu

b) aina suureen x kaksinkertaistuessa suure y nelinkertaistuu?

6.4 Esitä suure w suureiden x, y ja z lausekkeena, kun

v)
- aina suureen x kaksinkertaistuessa w nelinkertaistuu
- aina suureen y kaksinkertaistuessa w puolittuu
- aina suureen z nelinkertaistuessa w kaksinkertaistuu
- jos $x = 6$, $y = 5$ ja $z = 4$, niin $w = 3$.

a)
- aina suureen x nelinkertaistuessa w puolittuu
- aina suureen y kaksinkertaistuessa myös w kaksinkertaistuu
- aina suureen z kaksinkertaistuessa w pienenee neljäsosaan
- jos $x = 9$, $y = 8$ ja $z = 7$, niin $w = 6$.

7. YHTÄLÖISTÄ

7.1 Yleistä

Yhtälön ratkaiseminen tarkoittaa tuntemattoman muuttujan kaikkien sellaisten arvojen hakemista, joilla yhtälö toteutuu. Näitä tuntemattoman arvoja sanotaan yhtälön **ratkaisuiksi** tai **juuriksi**.

Helpoimmat yhtälöt voi ratkaista käyttäen seuraavia toimenpiteitä:

1. Sievennetään erikseen yhtälön kumpaakin puolta suorittamalla merkittyjä laskutoimituksia.
2. Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä (tai vähentää) sama luku.
3. Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla nollasta eroavalla luvulla.

Huomautus. Yhtälön voi usein ratkaista apuvälineiden komennolla
solve(yhtälö, ratkaistava muuttuja)

Harjoitustehtäviä

7.1.1 Ratkaise seuraavat yhtälöt sekä käsin että laskimella.

v1) $3(x-1)+4=5-3x$ **v2)** $3(x-1)+4=5+3x$

v3) $5(x-3)=3(x+1)+2(x-9)$ **v4)** $x(x+3)=(x+2)^2$

a) $5(x+2)=3(2x+4)$ **b)** $(x+2)^2=x(x+4)$

c) $(x-3)(x+3)=x^2+x-9$ **d)** $(x+3)^2=(x-3)^2$

e) $(x+2)(x+3)=x^2+5x$ **f)** $1-(1+x)^2=-x(x+2)$

7.1.2 Ratkaise seuraavat yhtälöt sekä käsin että laskimella kiinnittäen huomiota vastauksen ilmoittamiseen.

v1) $6(x+1)=2(3x-1)$ **v2)** $4(x+1)=2(2x+1)+2$

a) $x^2-4x=(x-2)^2$ **b)** $x(2x+3)=2x(x+2)-x$

c) $(2x+1)^2=(x+1)(4x+4)$ **d)** $(3x-1)^2=9x^2+1$

7.2 Tavallisimpia yhtälötyyppejä

7.2.1 Lineaarinen eli ensimmäisen asteen yhtälö

Lineaarinen eli 1. asteen yhtälö on muotoa $ax+b=0$, missä tuntemattoman x kerroin a eroaa nollasta. Tällä yhtälöllä on yksi ratkaisu $x=-\dfrac{b}{a}$.

Esimerkki. Lineaarisen yhtälön $2x+3=0$ ratkaisu on $x=-\dfrac{3}{2}$.

Huomautus. Moni, aluksi ehkä hankalankin näköinen yhtälö palautuu ratkaisun kuluessa lineaariseksi. Tällaisia yhtälöitä tarkastellaan jatkossa esimerkiksi murtoyhtälöiden yhteydessä.

7.2.2 Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälö $ax^2+bx+c=0$ (missä $a\neq 0$) voidaan ratkaista käyttäen kohdassa 2.4 neliöimällä johdettua ratkaisukaavaa

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ratkaisukaavassa neliöjuuren alla olevaa lauseketta sanotaan **diskriminanttiksi** ja sitä merkitään

$$D=b^2-4ac$$

(Reaalikertoimisen) toisen asteen yhtälön juurten määrä ja laatu riippuvat diskriminantista D seuraavasti:

- Jos $D>0$, niin toisen asteen yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta.
- Jos $D=0$, niin toisen asteen yhtälöllä on yksi reaalinen juuri, joka on ns. kaksinkertainen juuri.
- Jos $D<0$, niin toisen asteen yhtälöllä on kaksi imaginaarista juurta, jotka ovat toistensa liittolukuja.

Esimerkki. $3x^2-4x+1=0 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}=\dfrac{4\pm2}{6}=\begin{cases}1\\ \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}\end{cases}$

Esimerkki. $x^2-2x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{2\pm2i}{2}=\underline{\underline{1\pm i}}$

Huomautus. Jos apuvälineitä halutaan käyttää yhtälön kaikkien kompleksisten juurten etsimiseen, niin on käytettävä eri komentoa kuin pelkkien reaalisten juurten etsimiseen. TI-laskimessa kyseinen komento on csolve.

Esimerkki. Määritä kerroin c siten, että yhtälöllä $x^2+10x+c=0$ on täsmälleen yksi reaalinen juuri (ns. kaksoisjuuri).

Toisen asteen yhtälöllä on 1 reaalinen juuri
$\Leftrightarrow$ diskriminantti $=0$
$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$
$\Leftrightarrow 10^2-4\cdot1\cdot c=0$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{c=25}}$

Jos $c=25$, niin ratkaisukaavan avulla voi helposti todeta, että esimerkin yhtälöllä on yksi reaalinen juuri $x=-5$.

7.2.3 *n*:nnen asteen yhtälö

Otsakkeen yhtälö on muotoa $a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0=0$, missä $a_n\neq0$.

Algebran peruslause. *n*:nnen asteen yhtälöllä on *n* juurta, jos myös imaginaariset juuret ja useammankertaiset juuret kertalukuineen lasketaan mukaan.

Esimerkki. Seuraavassa on joitakin (poikkeuksellisen helppoja) polynomiyhtälöitä ja niiden juuret, joita todellakin on yhtälön asteluvun verran.

Yhtälö	Juuret
$x^3-2x^2-x+2=0$	$1, -1, 2$
$x^3-4x^2+5x-2=0$	$1, 1, 2$
$x^3-x^2+x-1=0$	$1, i, -i$
$x^4+5x^2+4=0$	$i, -i, 2i, -2i$
$x^7+3x^6+4x^5-4x^3-4x^2=0$	$0, 0, 1, -1+i, -1+i, -1-i, -1-i$
$x^3+3x-2i=0$	$i, i, -2i$

Huomautus. Juuren useammankertaisuus ja sen merkitys tulee myöhemmin ymmärrettäväksi, kun perehdymme polynomin tekijöihinjakoon.

Huomautus. Jos reaalikertoimisen polynomiyhtälön asteluku n on pariton, niin yhtälöllä on ainakin yksi reaalinen juuri, sillä paritonta astetta olevan polynomifunktion kuvaaja kulkee xy-tasossa johtavan kertoimen positiivisilla arvoilla vasemmalta alhaalta oikealle ylös ja johtavan kertoimen negatiivisilla arvoilla vasemmalta ylhäältä oikealle alas leikaten x-akselia ainakin kerran.

Esimerkki. Yhtälöllä $2x^3+3x^2+4x+5=0$ on yksi reaalinen juuri $x \approx 1.3711$ sekä imaginaarinen juuripari $x \approx -0.0644 \pm 1.3488i$.

Huomautus. Yleisestikin reaalikertoimisen polynomiyhtälön mahdolliset imaginaariset juuret esiintyvät aina liittolukupareina.

Huomautus. Kaksi edellistä huomautusta koskevat vain reaalikertoimisia polynomeja kuten taulukon viimeisen rivin imaginaarikertoimisesta yhtälöstä selviää. Imaginaarikertoimisen polynomifunktion kuvaajaa ei voi edes piirtää reaaliseen xy-koordinaatistoon.

Käytännössä vastaantulevat polynomiyhtälöt ovat tavallisesti reaalikertoimisia, koska todellisiin ilmiöihin liittyvän yhtälön kertoimet saadaan esimerkiksi sähkötekniikassa tutkittavan virtapiirin komponenttien arvoista, jotka ovat tietenkin reaalisia. Saadun yhtälön (reaalisista tai imaginaarisista) juurista voidaan sitten päätellä esimerkiksi piirin virran ominaisuudet.

Vaikka kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisemiseksi on olemassa ratkaisukaavat, niin kyseiset yhtälöt ratkaistaan yleensä erikoistapauksia lukuun ottamatta apuvälineillä, sillä kolmannen asteen yhtälön $ax^3+bx^2+cx+d=0$ yhdenkin juuren kaava on varsin työlään tuntuinen

$$x_1=-\frac{b}{3a}-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}$$

$$-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3}}{2}}$$

Voidaan osoittaa, että viidennen ja korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemiseksi kertoimien juurilausekkeiden avulla ei voida edes johtaa yleisiä ratkaisukaavoja.

7.2.4 Murtoyhtälö

Murtoyhtälössä tuntemattoman polynomilausekkeita esiintyy nimittäjissäkin. Koska nollalla jakamista ei ole edes määritelty, niin nimittäjän nollakohta ei voi tietenkään olla murtoyhtälön juuri.

Murtoyhtälö ratkaistaan usein kertomalla nimittäjät pois yhtälöstä.

Tämä tapahtuu kertomalla yhtälön molemmat puolet

- joko kaikkien nimittäjien tulolla tai
- kaikkien nimittäjien pienimmällä yhteisellä jaettavalla, jolloin tuntemattomalle jatkossa saatava lauseke on heti supistetummassa muodossa.

Jatkomahdollisuus 1. Jos kertomisen jälkeen saatavassa yhtälössä esiintyy vain termejä, jotka ovat joko tuntemattoman suhteen ensimmäistä astetta tai joista vallan puuttuu tuntematon, niin siirrä kaikki tuntematonta sisältävät termit vasemmalle ja muut termit oikealle. Vasemmalla puolella voit sitten ottaa tuntemattoman yhteiseksi tekijäksi ja lopuksi jakaa yhtälön molemmat puolet tuntemattoman kerroinlausekkeella. Saadusta ratkaisusta on vielä tutkittava, ettei se ole murtoyhtälön nimittäjän nollakohta.

Jatkomahdollisuus 2. Jos kertomisen jälkeen saatavassa yhtälössä esiintyy vain termejä, jotka ovat tuntemattoman suhteen ensimmäistä ja toista astetta tai joista vallan puuttuu tuntematon, niin siirrä kaikki termit vasemmalle yhdistäen samanasteiset termit. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saaduista ratkaisuista on lopuksi tietenkin hylättävä ne, jotka ovat alkuperäisen murtoyhtälön nimittäjän nollakohtia.

Jatkomahdollisuus 3. Jos kertomisen jälkeen saatavassa yhtälössä esiintyy tuntemattoman kolmannen tai korkeamman asteen termejä, niin poikkeustapauksia lukuun ottamatta kannattaa turvautua apuvälineiden käyttöön.

Esimerkki. Ratkaise x yhtälöstä $\eta = \frac{x - x_0}{x}$, kun $x_0 > 0$ ja $0 \le \eta < 1$.

$$\eta = \frac{x - x_0}{x} \quad \Big| \cdot x$$

, oltava $x \neq 0$. Tarkistetaan lopuksi ehdon voimassaolo.

$$\eta x = x - x_0$$

Koska saadussa yhtälössä esiintyy vain tuntemattoman x ensimmäisen asteen termejä ja termejä, joissa ei ole lainkaan tuntematonta x, niin seuraa edellä esitettyä jatkomahdollisuutta 1, jossa tuntemattomat kertoimineen siirretään vasemmalle ja muut termit oikealle.

$$\eta x - x = -x_0$$

$$(\eta - 1)x = -x_0 \quad \Big| : (\eta - 1) \neq 0$$

$$x = \frac{-x_0}{\eta - 1} = \underline{\underline{\frac{x_0}{1-\eta}}}$$

Kelpaa, koska saatu $x > 0$.

Esimerkki.	$\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+3}{x(x+1)}$	Oltava $x \neq 0$ ja $x \neq -1$. Tarkista lopuksi ehdon voimassaolo. $\cdot\, x(x+1)$
	$\Rightarrow x^2 - x = x + 3$	Seuraa jatkomahdollisuutta 2 eli siirrä kaikki termit vasemmalle
	$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \overset{\text{ratkaisukaavalla}}{\Leftrightarrow} x = \begin{cases} -1 & \text{(ei kelpaa)} \\ 3 \end{cases}$	
	Vastaus: $\underline{\underline{x = 3}}$	

Harjoitustehtäviä

7.2.1 Ratkaise T_1 ja p_2 ihannekaasun tilanyhtälöstä $\dfrac{p_1V_1}{T_1}=\dfrac{p_2V_2}{T_2}$.
Huomaa, että p_1, V_1 ja T_1 ovat muuttujanimiä, jotka tarkoittavat tietyn kaasuerän painetta, tilavuutta ja lämpötilaa tietyssä tilanteessa, johon on liitetty alaindeksi 1. Vastaavasti p_2, V_2 ja T_2 tarkoittavat saman kaasuerän painetta, tilavuutta ja lämpötilaa tietyssä toisessa tilanteessa. Nämä muuttujanimet voitaisiin korvata vaikkapa yksimerkkisillä nimillä *x*, *y*, *z*, *u*, *v* ja *w*, jolloin kaava olisi muotoa $\dfrac{xy}{z}=\dfrac{uv}{w}$. Fysiikassa käytetään kuitenkin selvyyden vuoksi suureille vakiintuneita symboleja kuten *p*, *V*, *T*, *s*, *v*, *t*,…, joihin sitten liitetään sopivia tilanteesta riippuvia alaindeksejä.

7.2.2 Ratkaise tilavuuden lämpölaajenemista kuvaavan yhtälön $\Delta V = \gamma V_1 \Delta t$ (eli selvemmin $\Delta V = \gamma \cdot V_1 \cdot \Delta t$) oikealla puolella olevat muuttujat yksi kerrallaan muiden muuttujien lausekkeena. Huomaa, että em. kaavassa $\Delta t = t_2 - t_1$ on lämpötilan muutos ja $\Delta V = V_2 - V_1$ on vastaava tilavuuden muutos. Fysiikan kaavojen merkintä ΔV ei siis tarkoita mitään kertolaskua ”Δ kertaa *V*”, vaan symbolia Δ käytetään yleisesti perään kirjoitetun suureen muutoksen merkkinä. Niinpä esimerkiksi Δx tarkoittaa tavallisesti paikan *x* muutosta ja Δv tarkoittaa nopeuden *v* muutosta.

7.2.3 Ratkaise sekä ratkaisukaavaa että laskinta käyttäen yhtälöt

v1) $4x^2 - x - 3 = 0$	**v2)** $x^2 - 4x + 5 = 0$	**v3)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$
a) $6x^2 - x - 1 = 0$	**b)** $4x^2 - 8x + 5 = 0$	**c)** $9x^2 - 6x + 1 = 0$

7.2.4 Esitä, miten toisen asteen yhtälön juurten määrä riippuu diskriminantista. Selvitä sitten lyhyesti yhtälöitä ratkaisematta, montako reaalista juurta seuraavilla yhtälöillä on.

v1) $2x^2 - 5x + 11 = 0$	**v2)** $16x^2 - 8x + 1 = 0$	**v3)** $9x^2 + 4x - 13 = 0$
a) $9x^2 + 12x + 4 = 0$	**b)** $2x^2 + 3x + 4 = 0$	**c)** $3x^2 - 7x + 4 = 0$

7.2.5 Määritä yhtälöissä **v)** $ax^2+3x+4=0$ **a)** $8x^2+bx-2=0$ kerroin *a* tai *b* siten, että yhtälöllä on täsmälleen yksi reaalinen juuri.

7.2.6 Määritä kerroin *p* siten, että yhtälöllä $x^2+px+4=0$ on juurena **v)** $x=-3$ **a)** $x=6$. Mikä on yhtälön toinen juuri?

7.2.7 Mitä tiedät reaalikertoimisen polynomiyhtälön imaginaarisista juurista? Eräällä reaalikertoimisella toisen asteen yhtälöllä on kompleksinen juuri **v)** $3+2i$ **a)** $4-2i$. Mikä on toinen juuri? Keksitkö yhtälön?

7.2.8 Ratkaise käsin ja laskimella seuraavista fysiikan kaavoista sulkeisiin kirjatut suureet. Kussakin vastauksessa saa olla enintään yksi jakoviiva eikä yhtään eksponenttia.

a) $\rho=\dfrac{pM}{RT}$ (T) **b)** $\dfrac{1}{k}=M_u+\dfrac{d}{\lambda}+M_s$ (λ)

c) $\Phi=kA(T_s-T_u)$ (T_u) **d)** $\eta_C=\dfrac{T_1-T_2}{T_1}$ (T_1)

e) $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$ (C, C_2) **f)** $R_E=\dfrac{U-U_k}{I_k}$ (U_k)

7.2.9 Ratkaise käsin ja laskimella yhtälöt

v1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}$ **v2)** $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}$

a) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2x}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

7.3 Sekalaisia vinkkejä

Vinkki 1. Joskus jokin yhtälössä esiintyvä tuntematonta sisältävä lauseke kannattaa ottaa uudeksi **aputuntemattomaksi**.

Esimerkki. $3x^4+2x^2-5=0$ | Merkitään $x^2=t$, jolloin $x^4=t^2$

$\Leftrightarrow$ $3t^2+2t-5=0$ | Käytä 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa

$\Leftrightarrow$ $t=1$ tai $t=-\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x^2=1$ tai $x^2=-\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{x=\pm 1 \text{ tai } x=\pm \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{5}{3}}\approx \pm 1.291\,\mathrm{i}}}$

Esimerkki. $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$ | Merkitään $5^x = t$, jolloin $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2 = t^2$

$\Leftrightarrow \quad t^2 - 6t + 5 = 0$ | Käytä 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa

$\Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \text{tai} \quad t = 5$

$\Leftrightarrow \quad 5^x = 1 \quad \text{tai} \quad 5^x = 5$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1}}$

Vinkki 2. Ratkaistaessa yhtälöä, jossa tulo on merkitty nollaksi, voit käyttää **tulon nollasääntöä:**

Tulo on nolla, jos ja vain jos ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.

Esimerkki. $x^3 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x - 1 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = -1}}$

Huomautus. Muista, että yhtälön saa ratkaisujen muuttumatta (kertoa tai) jakaa vain nollasta eroavalla lausekkeella.

Jos kuitenkin jaat yhtälön molemmilta puolilta pois saman tuntematonta sisältävän tekijälausekkeen, niin poisjaettu tekijä on merkittävä nollaksi ja saadut juuret on otettava mukaan alkuperäisen yhtälön ratkaisuihin.

Esim. $5x(x+1) = 2(x+1)$ | $:(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1$

$5x = 2$

$x_2 = 0.4$

Vastaus $\underline{\underline{\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0.4 \end{cases}}}$

Saman yhtälön voi ratkaista turvallisemmin myös tulon nollasäännöllä:

$5x(x+1) = 2(x+1)$

$\Leftrightarrow \quad 5x(x+1) - 2(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (5x-2)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 5x - 2 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0.4 \text{ tai } x = -1}}$

Jos saman yhtälön ratkaisee suorittamalla kertolaskut auki, niin ratkaistavaksi tulee toisen asteen yhtälö, mitä kannattaisi pyrkiä välttämään.

Harjoitustehtäviä

7.3.1 Jos toisen asteen yhtälö on vaillinainen, ts. yhtälöstä puuttuu ensimmäisen asteen termi tai vakiotermi, niin yhtälö voidaan ratkaista helposti ilman ratkaisukaavaakin. Ratkaise seuraavat yhtälöt ensin ratkaisukaavalla. Ratkaise sitten helpommalla tavalla ne yhtälöt, jotka ovat vaillinaisia. Etsi myös mahdolliset imaginaariset juuret.

v1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ **v2)** $49x^2 + 81 = 0$ **v3)** $321x^2 - 678x = 0$

a) $4x^2 + 9 = 0$ **b)** $7x^2 - 9x = 0$ **c)** $5x^2 - 9x + 4 = 0$

7.3.2 Ratkaise sopivaa aputuntematonta käyttäen seuraavat yhtälöt.

v1) $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

v2) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ (Ota 2^x aputuntemattomaksi)

v3) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$ (Etsi myös imaginaariset juuret)

a) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{3} = 0$ (0ta 3^x aputuntemattomaksi)

c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ (Etsi myös imaginaariset juuret)

7.3.3 Etsi tulon nollasääntöä käyttäen seuraavien yhtälöiden kaikki ratkaisut (myös imaginaariset).

v1) $(x-3)(x+7) = 0$ **v2)** $5(x+2)(2x+3)(3x+4) = 0$

v3) $x^3 - 7x^2 = 0$ **v4)** $x^5 - 8x^3 = 0$

v5) $3x(7x-2) - (7x-2) = 0$ **v6)** $(5x+1)(2x-3) = 4(2x-3)$

a) $(x-4)(2x+1) = 0$ **b)** $3x(4x+1)(5x+2) = 0$

c) $x^4 - 4x^2 = 0$ **d)** $x^5 + 4x^3 = 0$

e) $2x(x+3) - 5(x+3) = 0$ **f)** $(5x+1)(x-7) = x(x-7)$

7.3.4 Ratkaise seuraavat yhtälöt jakamalla yhtälön molemmilta puolilta pois sama tuntematonta sisältävä tekijälauseke. Kirjoita myös tätä menettelyä koskeva ohje.

v1) $x^2(x-5) = 4(x-5)$ **v2)** $x^2 - 4 = x + 2$

a) $2x^2(11x+3) = 8(11x+3)$ **b)** $(x^2 + 2x + 1)(x-3) = (x+1)(3x-5)$

7.3.5 Ratkaise yhtälöt käsin ja laskimella

v1) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **v2)** $(56x^2 + 67x)(78x + 89) = 0$

v3) $(54x + 43)(32x + 21) = (4x + 3)(32x + 21)$

a) $(t^2 - 4)^3 = t^2 - 4$ **b)** $(x^3 - 8)(x^2 + 3x - 4) = 0$

c) $(x^2 + 4)(7x - 3) = -5(7x - 3)$

7.4 Käytännön sovelluksia

Yksinkertaisten perusyhtälöiden sujuva ratkaisutaito ilman apuvälineitä kuuluu ilman muuta insinööriltä edellytettäviin perustaitoihin.

Yhtä itsestään selvää pitäisi kuitenkin nykypäivänä olla, että insinööri osaa käyttää tehokkaasti apuvälineitä laskelmissaan. Näin insinööri voi keskittyä ennen kaikkea oman erikoisosaamisensa hyödyntämiseen: Ammatissa vastaantuleva käytännön ongelma on osattava muuttaa matemaattiseksi tehtäväksi, jonka mekaanisen ratkaisemisen voi useimmiten kaikkein nopeimmin ja luotettavimmin suorittaa sopivaa apuvälinettä tehokkaasti hyödyntäen. Saadun vastauksen tulkinta ja sen edellyttämät käytännön toimenpiteet vaativat jälleen insinöörin oman erikoisalan tietoja.

Mikäli haluat käyttää yhtälöä jonkin tuntemattoman suureen arvon selvittämiseen, niin Sinun tulee esittää jokin sopiva suure kahdella erilaisella tavalla, jotta saisit yhtälön tuntemattoman ratkaisemiseksi.

Sinun tulee kertoa käyttämäsi merkinnät selvästi, jotta lukija ja sinä itsekin myöhemmin saisit esityksestäsi selvän. Myös muodostamasi yhtälön sisältö sinun on selvitettävä ymmärrettävällä suomen kielellä sanallisesti seuraavien esimerkkien mukaisella tavalla.

Seuraavassa sovellusesimerkkien yhtälöt ratkaistaan yleensä laskinta käyttäen. Tällöin muistiinpanoihin on kirjoitettava sekä yhtälö laskimeen syötetyssä muodossa että kaikki laskimen antamat ratkaisut mahdollisine laskinkommentteineen. Myös yhtälön fysikaalisesti sopimattomat ratkaisut kirjataan näkyviin, vaikka tehtävän lopulliseen vastaukseen niitä ei saa tietenkään hyväksyä.

Esimerkki. Mikä on tietokoneen lähtöhinta, jos hinta 12 prosentin alennuksen jälkeen on 1143.12 €?

Ratkaisu. Olkoon lähtöhinta *x*. Kirjoitetaan ensin alennettua hintaa koskeva yhtälö, josta sitten ratkaistaan lähtöhinta:

$$\boxed{\text{Alennettu hinta} = \text{lähtöhinta} - \text{alennus}}$$

$$1143.12\ € = x - \frac{12}{100} \cdot x$$

$$\overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \quad x = 1299\ € \qquad \underline{\underline{\text{Vastaus: } 1299\ €}}$$

Esimerkki. Määritä millimetrin tarkkuudella ympyrän säde, jos säteen kasvattaminen 1.000 metrillä kasvattaa
a) ympyrän alaa 10.00 neliömetriä
b) ympyrän piiriä 10.00 metriä?

Ratkaisu. a) Olkoon alkuperäisen ympyrän säde r metriä.

Muodostetaan (ilman yksiköitä) yhtälö alan lisäykselle:

$$\boxed{\text{alan lisäys} = \text{uuden ympyrän ala} - \text{alkuperäisen ympyrän ala}}$$

$$10 = \pi(r+1)^2 - \pi r^2$$
$$10 = \pi(\cancel{r^2} + 2r + 1) - \cancel{\pi r^2}$$
$$10 - \pi = 2\pi r$$
$$r = \frac{10 - \pi}{2\pi} \approx 1.091549$$

Toisin: Suoraan laskimella

Vast. Säde on 1.092 m $=$ 1092 mm

b) Olkoon alkuperäisen ympyrän säde r metriä.

Piirin lisäykselle saadaan (ilman yksiköitä) yhtälö:

$$\boxed{\text{piirin lisäys} = \text{uuden ympyrän piiri} - \text{alkuperäisen ympyrän piiri}}$$

$$10 = 2\pi(\cancel{r} + 1) - \cancel{2\pi r}$$
$$10 = 2\pi$$

Koska päädyimme mahdottomaan yhtälöön, niin kysyttyä ympyrää ei ole olemassa.

Esimerkki. Paljonko suolaa on lisättävä 5.2 kilogrammaan 12-prosenttista suolaliuosta, jotta liuoksen pitoisuus nousisi 17 prosenttiin?

Ratkaisu. Olkoon lisättävän suolan massa x. Sen määrittämiseksi muodostamme yhtälön perustuen seuraavaan tietoon:

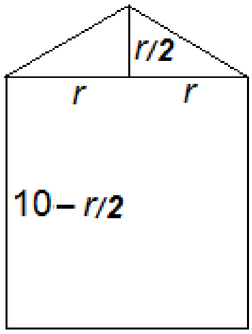
$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{Suolan massa}\\ \text{alkuperäisessä}\\ \text{liuoksessa}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Lisätyn}\\ \text{suolan}\\ \text{massa}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Suolan massa}\\ \text{lopullisessa}\\ \text{liuoksessa}\end{pmatrix}}$$

$$\frac{12}{100}\cdot 5.2 + x = \frac{17}{100}\cdot(5.2 + x)$$

$$\overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \quad x = 0.3133$$

Vastaus: Suolaa on lisättävä 310 grammaa

Esimerkki. Tarkoituksena on rakentaa 1000 kuutiometrin suuruinen siilo, jonka kokonaiskorkeus on 10.0 metriä. Määritä lieriön halkaisija 0.1 metrin tarkkuudella, kun siilo muodostuu suorasta ympyrälieriöstä ja sen kärjessä olevasta kartiosta, jonka korkeus on puolet lieriön säteestä. Seinämän vahvuutta ei tarvitse huomioida.



Ratkaisu. Olkoon lieriön säde *r*. Koska

$$\boxed{\text{siilon tilavuus} = \text{lieriön tilavuus} + \text{kartion tilavuus}},$$

niin
$$V_{\text{siilo}} = A_{\text{lieriö}} \cdot h_{\text{lieriö}} + \frac{1}{3} \cdot A_{\text{kartio}} \cdot h_{\text{kartio}}$$

$$\Leftrightarrow 1000 = \pi r^2 \cdot (10 - r/2) + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r/2$$

Tämä 3. asteen yhtälö kannattaa ratkaista laskimella

$$\overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \quad r = -5.2079 \ \text{ tai } \ r = 6.355 \ \text{ tai } \ r = 28.853$$

Negatiivinen säde on tietenkin mahdoton. Säteen arvo $r = 28.853$ ei myöskään kelpaa, koska tällöin lieriön korkeus $h_{\text{lieriö}} = 10 - r/2$ olisi negatiivinen. Jäljelle jää siis vain yksi mahdollinen säde $r = 6.355$, jota vastaava lieriön halkaisija $2r \approx \underline{\underline{12.7 \text{ metriä}}}$.

Esimerkki. Millä nopeudella on ajettava matkan loppuosa, jotta keskinopeudeksi koko matkalla tulisi tasan 100 km/h, kun alkupuoli matkasta on ajettu nopeudella a) 80.0 km/h b) tasan 50 km/h ?

Ratkaisu. Olkoon koko matkan pituus 2*s* ja kysytty nopeus *v* .
Muodostamme molemmissa kohdissa yhtälön samalla periaatteella:

$$\boxed{\text{kokonaisaika} = \text{1. osuuden aika} + \text{2. osuuden aika}} \quad \Big| \quad t = \frac{s}{v} = \frac{\text{matka}}{\text{keskinopeus}}$$

a)
$$\frac{2s}{100\text{ km/h}} = \frac{s}{80\text{ km/h}} + \frac{s}{v} \quad \Big| \cdot \frac{400\text{ km/h} \cdot v}{s}$$

$$8v = 5v + 400\text{ km/h}$$

$$\underline{\underline{v}} = \frac{400\text{ km/h}}{3} = 133.33\text{ km/h} \approx \underline{\underline{133\text{ km/h}}}$$

b)
$$\frac{2s}{100\text{ km/h}} = \frac{s}{50\text{ km/h}} + \frac{s}{v} \quad \Big| \cdot \frac{100\text{ km/h} \cdot v}{s}$$

$$2v = 2v + 100\text{ km/h}$$

$$0 \cdot v = 100\text{ km/h}$$

Koska saatu yhtälö on mahdoton, niin <u>kohdassa b ei ole ratkaisua</u>.

Huomaa, että b-kohdassa on jo alkumatkaan käytetty täsmälleen se aika, joka saataisiin käyttää koko matkaan eikä edes loppumatkan kulkeminen valon nopeudella nostaisi keskinopeutta vaadittuun nopeuteen 100 km/h.

Esimerkki. Määritä tasaisella nopeudella liikkuvan auton nopeus, jos nopeuden lisääminen määrällä 5.0 km/h säästää 45 kilometrin matkalla aikaa 3.0 minuuttia?

Ratkaisu. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi lausumme ajansäästön tunteina: $3\text{ min} = 3 \cdot \text{h}/60 = 0.05\text{ h}$ ja jätämme yksiköt pois.

Olkoon alkuperäinen nopeus *v*.

Muodostetaan ajansäästöä koskeva yhtälö:

$$\boxed{\text{Ajan säästö} = \text{alkuperäinen aika} - \text{uusi aika}} \qquad \left| \quad \text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} \right.$$

$$0.05 = \frac{45}{v} - \frac{45}{v+5} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} v = 64.6286 \text{ tai } v = -69.6286 \text{ (ei kelpaa)}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kysytty nopeus on 65 km/h}}}$.

Esimerkki. Tässä esimerkissä näytetään, miten laskinta TI-Nspire CX CAS voi hyödyntää määritettäessä kerroin t siten, että yhtälön $x^2 + tx + 3 = 0$ toinen juuri on kolme kertaa niin suuri kuin toinen juuri.

Annetun malliratkaisun voinet muokata omalle symboliselle laskimellesi.

Komentoon

$$\text{solve}(x^2 + t \cdot x + 3 = 0, x)$$

laskin antaa vastauksen

$$x = \frac{\sqrt{t^2 - 12} - t}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-\sqrt{t^2 - 12} - t}{2}.$$

Kopioi laskimen vastaus syöttöriville, jossa muokkaat siitä määrittelyt

$$x1 := \frac{\sqrt{t^2 - 12} - t}{2} \quad : \quad x2 := \frac{-\sqrt{t^2 - 12} - t}{2}$$

Kysytyt t-arvot saadaan sitten komennoilla

$$\text{solve}(x1 = 3 \cdot x2, t) \quad \hookleftarrow \quad \underline{\underline{t = -4}}$$

$$\text{solve}(x2 = 3 \cdot x1, t) \quad \hookleftarrow \quad \underline{\underline{t = 4}}$$

Tulokset voi vielä tarkistaa laskimella with-operaattoria käyttäen:

$$\text{solve}(x^2 + t \cdot x + 3 = 0, x) \mid t = -4 \quad \hookleftarrow \quad x = 1 \text{ or } x = 3$$

$$\text{solve}(x^2 + t \cdot x + 3 = 0, x) \mid t = 4 \quad \hookleftarrow \quad x = -3 \text{ or } x = -1.$$

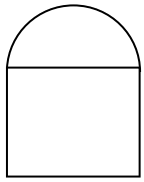
Näemme, että kummassakin tapauksessa toinen juuri on todellakin kolme kertaa toisen juuren suuruinen.

Poista lopuksi määrittelysi $x1$ ja $x2$, etteivät ne tuota haittaa myöhemmin!

Harjoitustehtäviä

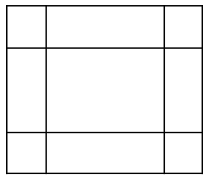
7.4.1 Mikä on tuotteen lähtöhinta, jos hinta
v) 12.5 % korotuksen jälkeen on 388.80 €
a) 6 % alennuksen jälkeen on 2204.30 € ?

7.4.2 Kuvanmukaisen ikkunan alaosa on suorakulmio ja yläosa puoliympyrä. Mikä on ikkunan leveys, jos ikkunan
v) ala on 2.50 neliömetriä ja kokonaiskorkeus 2.10 m?
a) ala on 3.50 neliömetriä ja kokonaiskorkeus 2.30 m?
b) ala on 7.00 neliömetriä ja kokonaiskorkeus 2.00 m?



7.4.3 Mikä on tasaisella nopeudella liikkuvan auton nopeus, jos nopeuden
v) lisääminen määrällä 25 km/h säästää 320 km matkalla aikaa 0.70 h?
a) vähentäminen määrällä 15 km/h lisää 410 km matkalla aikaa 1.2 h?

7.4.4 Jos ohuen suorakulmaisen levyn nurkista leikataan pois neliöt, niin jäljelle jäävästä levystä voidaan taittaa kuvaan piirrettyjä viivoja pitkin kanneton laatikko. Kuinka suuret neliöt on leikattava nurkista, jos levyn koko on
v) 234 mm × 345 mm ja siitä halutaan taittaa astia, jonka tilavuus on tasan litra?
a) 2.40 m × 3.60 m ja siitä halutaan taittaa astia, jonka tilavuus on **a1)** 1.80 **a2)** 1.90 kuutiometriä?



7.4.5 Paljonko vettä on haihdutettava
v) 570 grammasta 3.5-prosenttista suolaliuosta, jotta liuoksen suolapitoisuus kohoaisi 15 prosenttiin?
a) 24.0 kilogrammasta 12.0-prosenttista suolaliuosta, jotta liuoksen suolapitoisuus kohoaisi 17.5 prosenttiin?

7.4.6 Paljonko 25.0-prosenttista suolaliuosta on lisättävä
v) 55.0 kilogrammaan 7.50-prosenttista suolaliuosta, jotta liuoksen suolapitoisuus nousisi 12.0 prosenttiin?
a) 325 grammaan 12.5-prosenttista suolaliuosta, jotta liuoksen suolapitoisuus nousisi 18.0 prosenttiin?

7.4.7 Ratkaise systemaattisesti laskien ilman kokeiluja seuraava tehtävä. Kuinka vanha Matti on nyt, jos
v) hän on 22 v kuluttua 23 kertaa niin vanha kuin hän oli 22 v sitten?
a) hän on 20 v kuluttua 9 kertaa niin vanha kuin hän oli 20 v sitten?

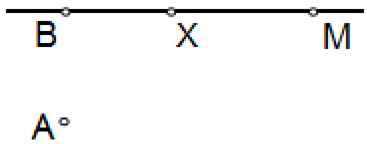
7.4.8 Autoilija ajaa **v)** kaksi kolmasosaa **a)** kolme viidesosaa **b)** kolme neljäsosaa matkasta nopeudella 70 km/h. Millä nopeudella hänen tulisi ajaa loppumatka, jotta keskinopeus olisi 100 km/h?

7.4.9 Tehtävänä on rakentaa 12500 litran säiliö, jonka keskiosa on suoran ympyrälieriön muotoinen ja päät puolipallon muotoiset. Määritä säiliön halkaisija millimetrin tarkkuudella, kun säiliön kokonaispituus on
v) 4250 mm **a)** 5250 mm. Seinämän vahvuutta ei huomioida.

7.4.10 Valitse kerroin p siten, että yhtälön $x^2 + px + 7 = 0$ toinen juuri on **v)** kaksi **a)** kolme kertaa niin suuri kuin toinen. Määritä myös kyseiset juuret vaikkapa laskimen with-operaattoria tehokkaasti hyödyntäen.

7.4.11 **v)** Määritä toisen asteen yhtälön $ax^2 + bc + c = 0$ juurten summa ja tulo vaikkapa laskimen with-operaattoria hyödyntäen. Esitä havaintosi lauseena. On helppo nähdä, että yhtälön $1234x^2 + 7654x - 8888 = 0$ yhtenä juurena on 1. Mikä on toinen juuri edellä toteamasi perusteella?

7.4.12 Metsässä olevasta pisteestä A on 1200 m matkaa kuvan mukaisen suoran polun lähimpään pisteeseen B. Pisteestä B on 2400 m polulla olevaan kohteeseen M.



Pisteessä A oleva henkilö juoksee suoraan polun johonkin pisteeseen X ja siitä polkua pitkin kohteeseen M. Henkilön juoksunopeus on metsässä 2.0 m/s ja polulla 4.0 m/s. Määritä pisteiden B ja X välimatka, jos juoksija saapuu kohteeseen M **v)** 19.5 minuutin **a)** 22 minuutin kuluttua lähdöstä. Ratkaise muodostamasi yhtälö laskimella. Tehtävän voit ratkaista myös graafisesti. Juoksijan juoksuaika t riippuu tietenkin pisteiden B ja X välisestä etäisyydestä x. Laskimella voit helposti piirtää ajan t etäisyyden x funktiona. Kuvasta voit sitten nähdä, millä etäisyyden x arvoilla juoksuaika t saa halutun arvon. Kuvasta voit jo tähänastisillakin algebran taidoilla nähdä myös, miten juoksemalla pääsee kohteeseen mahdollisimman nopeasti. Myöhemmin tällaiset ääriarvotehtävät ratkaistaan ilman kuvaa differentiaalilaskennan avulla.

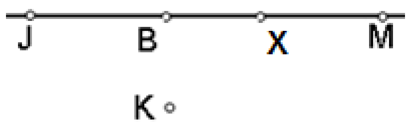
7.4.13 Jussin ja Kallen pitäisi molempien ehtiä mahdollisimman nopeasti 7.0 km päähän. Käytettävissään heillä on yksi pyörä, joka ei kanna kahta samanaikaisesti. Poikien juoksu- ja pyöräilynopeudet ovat

v) $v_{jJ} = 2.0$, $v_{jK} = 4.0$, $v_{pJ} = 8.0$ ja $v_{pK} = 7.0$

a) $v_{jJ} = 4.0$, $v_{jK} = 3.0$, $v_{pJ} = 8.0$ ja $v_{pK} = 6.0$ yksikkönä m/s.

Jussi lähtee pyörällä, jonka jättää tien varteen jatkaen matkaa juosten. Kalle taas juoksee alkumatkan ja pyöräilee loppumatkan. Kuinka pitkän matkan Jussi pyöräilee, jotta pojat olisivat perillä samanaikaisesti?

7.4.14 Tarkastellaan Jussia ja Kallea, joiden juoksu- ja pyöräilynopeudet on annettu edellisen tehtävän kohdissa **v)** ja **a).** Juoksunopeudet eivät riipu maastosta.



Nyt pojat lähtevät eri paikoista J ja K . Jussin on edettävä kuvan suoraa tietä pitkin pisteestä J kohteeseen M. Alkumatkan hän ajaa pyörällä, jättää pyöränsä tienvarteen pisteeseen X ja juoksee loppumatkan. Kalle taas juoksee maastossa pisteestä K suoraan sitä pistettä X kohden, johon Jussi jättää pyörän, ja ajaa loppumatkan pyörällä. Kuinka pitkän matkan JX Jussi pyöräilee, jotta pojat olisivat perillä samanaikaisesti? Etäisyydet ovat JM=8.0 km, JB=3.0 km ja KB=2.0 km. KB on Kallen lähtöpisteen kohtisuora etäisyys tiestä.

7.5 Polynomin tekijöihinjako

Johdantoesimerkki. Muodostetaan

a) kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat 1, 2 ja 3 ja jonka johtavan (eli korkeimman asteen) termin kerroin on 4:

$$Q(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3) \overset{\text{laskimella}}{=} 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

b) kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat -2 ja $3 \pm 4i$ ja jonka johtavan termin kerroin on 5

$$R(x) = 5(x-(-2))(x-(3+4i))(x-(3-4i)) \overset{\text{laskimella}}{=} 5x^3 - 20x^2 + 65x + 250$$

Huomautus. Johdantoesimerkin mukaan polynomin nollakohdat määrittävät polynomin tekijät. Tulos on yleisestikin voimassa:

Lause. Jokainen *n*. asteen polynomi $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ voidaan jakaa nollakohtiensa $x_1, ..., x_n$ ja johtavan kertoimen a_n avulla tekijöihin seuraavasti:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

Huomautus. Edellisessä lauseessa mainittuja polynomin $P(x)$ nollakohtia on algebran peruslauseen mukaan polynomin asteluvun *n* mukainen määrä. Jotkin luvuista x_i voivat olla keskenään samoja, jolloin kyseistä nollakohtaa sanotaan useammankertaiseksi nollakohdaksi ja sitä vastaa useammankertainen tekijä. Luvuista x_i osa voi olla myös imaginaarisia, jolloin imaginaarisen nollakohdan liittoluku on myös nollakohta (edellyttäen, että polynomi $P(x)$ on reaalikertoiminen kuten käytännön tehtävissä tavallisesti onkin).

Esimerkki. Polynomin $P(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 15$ kaikki nollakohdat $1 \pm 2i$, 1 ja 3 löytyvät nopeimmin laskimella ja niiden avulla saadaan polynomin jako ensimmäisen asteen tekijöihin

$$P(x) = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)(x - 1)(x - 3).$$

Tuloksen voi tarkistaa suorittamalla löydettyjen tekijöiden kertolaskut auki käsin tai laskimella. Mikäli imaginaariset liittotekijät kerrotaan keskenään, niin saadaan saman polynomin jako reaalisiin tekijöihin

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - 1)(x - 3),$$

jota ei voi mitenkään jakaa reaalisiin ensimmäisen asteen tekijöihin.

Huomautus. Edellisen esimerkin mukaisesti reaalikertoimisen polynomin imaginaariset nollakohdat esiintyvät aina liittolukupareina. Tällaista paria vastaa polynomin tekijöihinjaossa kaksi imaginaarista ensimmäisen asteen tekijää, joiden tulona saadaan reaalikertoiminen toisen asteen tekijä.

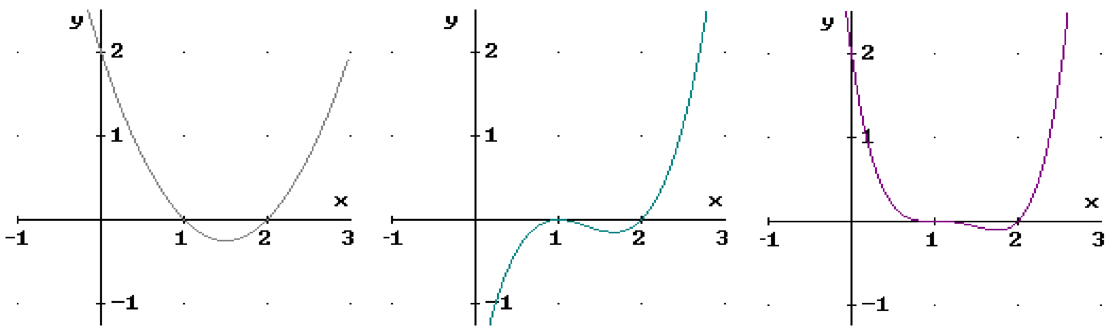
Esimerkki. Koska polynomin $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 9x + 18$ nollakohdat ovat 1.5, -2 ja 3, niin kertomalla kerroin 2 tekijän $(x - 1.5)$ sisään saadaan lopulta kyseisen polynomin **kokonaiskertoiminen tekijöihinjako**

$$P(x) = 2(x - 1.5)(x - (-2))(x - 3) = (2x - 3)(x + 2)(x - 3) \quad .$$

Esimerkki. Polynomilla $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ on vain nollakohdat 1 (ns. kaksinkertainen nollakohta) ja 2, joten $P(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Koska laskimesi ei ehkä näytä nollakohdan kaksinkertaisuutta (muuta kuin tekijöihinjaon lopputuloksessa olevan eksponentin avulla), niin nollakohtien 1 ja 2 löytymisen jälkeen tiedämme, että jommankumman nollakohdan on oltava kaksinkertainen nollakohta. Tilannetta voi tutkia suorittamalla jakolaskun $\dfrac{P(x)}{(x-1)(x-2)} = x - 1$, jolloin selviää, että $x = 1$ on kaksinkertainen nollakohta.

Huomautus. Useammankertainen nollakohta näkyy polynomin kuvaajassa siten, että useammankertaisen nollakohdan läheisyydessä kuvaaja seuraa jonkin matkaa x-akselia paremmin kuin yksinkertaisen nollakohdan läheisyydessä. Tämä ilmenee havainnollisesti polynomien $y = (x-1)^n(x-2) \quad (n = 1, 2, 3)$ kuvaajista, joissa nollakohta $x = 1$ on vuorollaan 1-, 2- ja 3-kertainen.



Huomautus. Laskimen TI-Nspire CX CAS komennoilla

Factor(polynomi, muuttuja) ja cFactor(polynomi, muuttuja)

voit yhtälöä ratkaisematta määrittää (riittävän helpon) polynomin jaon joko
- reaalisiin enintään toista astetta oleviin tekijöihin tai
- ensimmäisen asteen tekijöihin, jotka voivat olla imaginaarisiakin.

Huomautus. Polynomien tekijöihinjakoa voi hyödyntää esimerkiksi rationaalilausekkeiden sieventämisessä.

Esimerkki. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 3x - 5} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{2\cancel{(x-1)}(x + \frac{5}{2})} = \dfrac{x-4}{2x+5}$

Huomautus. Symboliset laskimet suorittavat edellisen esimerkin supistuksen pyytämättäkin. Kehittyneet laskimet jopa huomauttavat, että uusi supistettu lauseke ei ole sama kuin alkuperäinen, sillä lausekkeiden määrittelyjoukot ovat erit. Edellisenkin esimerkin lähtölauseke ei ole määritelty muuttujan x arvoilla 1 ja -2.5, kun taas supistettu lauseke on määrittelemättä vain arvolla $x=-2.5$.

Harjoitustehtäviä

7.5.1 Laske tämä tehtävä sekä käsin että laskimella.

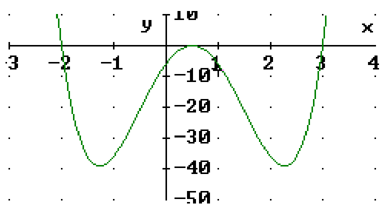
v1) Osoita, että polynomin $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$ nollakohdat ovat $1/2$, 2 ja -3. Jaa polynomi *P(x)* kokonaiskertoimisiin tekijöihin.

v2) Osoita, että 1, 2 ja imaginaariyksikkö *i* ovat polynomin $R(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ nollakohtia. Mikä on polynomin neljäs nollakohta? Jaa polynomi $R(x)$ sekä ensimmäisen asteen tekijöihin että reaalisiin tekijöihin.

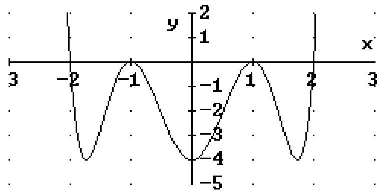
a) Osoita, että 0, 1, 1/2 ja $-1/3$ ovat polynomin $S(x)=6x^4-7x^3+x$ nollakohtia. Onko polynomilla muita nollakohtia? Jaa polynomi *S(x)* lopuksi kokonaiskertoimisiin ensimmäisen asteen tekijöihin.

b) Osoita, että polynomilla $T(x)=x^3-3x^2+4x-2$ on nollakohtina 1 ja $1+i$. Määritä polynomin muut nollakohdat. Jaa polynomi $T(x)$ sekä ensimmäisen asteen tekijöihin että reaalisiin tekijöihin.

7.5.2 v) Polynomin $P(x)=4x^4-8x^3-19x^2+23x-6$ kuvaaja leikkaa oheisen kuvan mukaisesti *x*-akselia kohdissa -2 ja 3 sekä sivuaa *x*-akselia kohdassa 0.5 . Jaa polynomi kokonaiskertoimisiin tekijöihin ilman laskinta.



a) Polynomin $Q(x)=x^6-6x^4+9x^2-4$ kuvaaja leikkaa oheisen kuvan mukaisesti *x*-akselia kohdissa -2 ja 2 sekä sivuaa *x*-akselia kohdissa -1 ja 1. Jaa polynomi tekijöihin ilman laskinta.



7.5.3 Jaa käsin ja laskimella mieluiten kokonaiskertoimisiin tekijöihin polynomit

v1) $P(x)=3x^2-5x+2$ **v2)** $Q(x)=6x^4-x^3-x^2$ **v3)** $R(x)=x^4+3x^2-4$

a) $S(x)=4x^2+4x+10$ **b)** $V(x)=x^4+8x^2-9$ **c)** $W(x)=3x^3+5x^2-2x$

7.5.4 Sievennä **v1)** $\dfrac{6x^2-5x-1}{3x^2+2x-5}$ **v2)** $\dfrac{5x^4-3x^3-2x^2}{3x^2+x-4}$

a) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+7x-8}$ **b)** $\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^4-5x^2-36}$ **c)** $\dfrac{6x^2+5x+1}{3x^4-5x^3-2x^2}$

8. YHTÄLÖRYHMISTÄ

8.1 Yhtälöryhmien ratkaisutapoja

Yhtälöryhmää ratkaistaessa haetaan kaikkia niitä tuntemattomien arvoja, jotka toteuttavat kaikki annetut yhtälöt.

Hyvin usein yhtälöpari ratkaistaan **sijoituskeinolla**, jolloin helpommasta yhtälöstä "ratkaistaan" toinen tuntematon toisen tuntemattoman avulla. Kun "ratkaistun" tuntemattoman lauseke sijoitetaan käyttämättömään yhtälöön, jää jäljelle vain yksi tuntematon, joka ratkaistaan. Kun saatu arvo sijoitetaan alussa "ratkaistun" tuntemattoman lausekkeeseen, saadaan tämäkin lopullisesti ratkaistua.

Esimerkki. Ratkaistaan edellisten ohjeiden mukaisesti yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 7 - 5x$$

Sijoitetaan y:n lauseke ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$3x + 4(7 - 5x) = 11 \quad \Leftrightarrow \quad -17x = -17 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Sijoitetaan saatu x:n arvo y:n lausekkeeseen:

$$y = 7 - 5 \cdot 1 = 2 \qquad \text{Vastaus}: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Sijoittamalla saatu ratkaisu takaisin alkuperäiseen yhtälöpariin voidaan todeta, että löydetyt arvot todella toteuttavat molemmat yhtälöt.

Saman yhtälöparin voi ratkaista myös myöhemmin tarkemmin esiteltävällä yhteenlaskukeinolla, jolloin välivaiheet ovat seuraavat:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 17x \qquad &= 17 \Leftrightarrow x = 1 \\ 17y &= 34 \Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Opettele ratkaisemaan yhtälöryhmät myös laskimellasi. Sopiva komento voi olla esimerkiksi

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases}, x, y \right) \quad \text{tai} \quad \text{solve}(3x + 4y = 11 \text{ and } 5x + y = 7, \{x\ y\})$$

Sijoituskeinoa voi käyttää useammassa vaiheessa myös isommankin yhtälöryhmän ratkaisemiseen seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki. $\begin{cases} 4x+3y+2z=7 \\ x+2y+3z=0 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$ | Ratkaistaan keskimmäisestä $x=-2y-3z$ ja sijoitetaan x:n lauseke muihin yhtälöihin

$\Rightarrow \begin{cases} 4(-2y-3z)+3y+2z=7 \\ (-2y-3z)^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$ | Muokataan kumpaakin yhtälöä

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y-10z=7 \\ 5y^2+10z^2+12yz-5=0 \end{cases}$ | Ratkaistaan ylemmästä $y=-1.4-2z$ ja sijoitetaan alempaan

$\Rightarrow 5(-1.4-2z)^2+10z^2+12(-1.4-2z)z-5=0$ | Muokataan yhtälöä

$\Leftrightarrow 6z^2+11.2z+4.8=0$ | Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \approx -0.67 \\ z_2=-1.2 \end{cases}$.

Sijoitetaan z:n arvot yksi kerrallaan edellä saatuun y : n lausekkeeseen sekä z : n ja y : n arvot lopuksi x:n lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\begin{cases} y_1=-1.4-2z_1 \overset{z_1\approx-0.67}{\approx} -0.07 \\ y_2=-1.4-2z_2 \overset{z_2=-1.2}{=} 1 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_1=-2y_1-3z_1 \overset{y_1\approx-0.07,\ z_1\approx-0.67}{\approx} 2.13 \\ x_2=-2y_2-3z_2 \overset{y_2=1,\ z_2=-1.2}{=} 1.6 \end{cases}$$

Vastaus : Ryhmällä on kaksi ratkaisua $\begin{cases} x_1 \approx 2.13 \\ y_1 \approx -0.07 \\ z_1 \approx -0.67 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_2=1.6 \\ y_2=1 \\ z_2=-1.2 \end{cases}$

Käytännössä insinöörin kannattaa tietenkin ratkaista yhtälöryhmät sekä ajan säästämiseksi että virheiden välttämiseksi tehokkailla apuvälineillä. Tarvittava syöte on edellisen sivun mallien kaltainen.

Tarkastelemme seuraavaksi lineaarisen yhtälöparin ratkaisemista **yhteenlaskukeinolla**. Siinä yhtälöt sopivasti kertomalla ja yhteenlaskemalla pyritään toinen tuntematon eliminoimaan, jolloin jäljelle jää yksi yhtälö ja yksi tuntematon, joka on helppo ratkaista. Kun ratkaistun tuntemattoman arvo sijoitetaan jompaankumpaan annetuista yhtälöistä, saadaan toinenkin tuntematon ratkaistua.

Esimerkki. Ratkaistaan yhteenlaskukeinolla yhtälöpari $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 5x-6y=11 \end{cases}$.

Tuntemattoman y kertoimet 4 ja -6 ovat "yhteensopivammat" kuin x:n kertoimet 3 ja 5, sillä y:n kertoimista saadaan "nollasumma" kertomalla luvuilla 3 ja 2, kun x:n kertoimet olisi kerrottava hankalammilla luvuilla 5 ja -3.

Aletaan siis eliminoida tuntematonta y kertomalla yhtälöt luvuilla 3 ja 2, jotka merkitään yhtälöiden perään, jotta lukija näkisi, mitä yhtälöille on tehty.
Seuraavaksi kerrotut yhtälöt lasketaan yhteen, minkä merkiksi yhtälöiden perään on kirjoitettu plusmerkki. Sitten summayhtälöstä ratkaistaan x.
Lopuksi y ratkaistaan vaikkapa ensimmäisestä yhtälöstä käyttäen tuntemattoman x arvoa.

$$\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 5x-6y=11 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 9x+12y=21 \\ 10x-12y=22 \end{cases} \left|\begin{array}{l} + \\ \end{array}\right.$$

$$19x=43 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{43}{19}}}$$

$$\underline{\underline{y}}=\frac{7-3x}{4} \overset{\text{Sijoitetaan } x}{=} \underline{\underline{\frac{1}{19}}}$$

Vertailun vuoksi eliminoimme tuntemattoman x kertomalla yhtälöt hankalammilla luvuilla 5 ja -3. Tällä kertaa emme kuitenkaan kirjoita kerrottuja yhtälöitä näkyviin vaan laskemmekin suoraan summayhtälön. Marginaalin merkinnöistä lukija voi kuitenkin selvittää, mitä on tehty. Oikean reunan plusmerkkiä ei ole aina tapana merkitä näkyviin. Summayhtälöstä on ratkaistu y ja sen avulla lopuksi x.

$$\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 5x-6y=11 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{array}\right. +$$

$$38y=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{38}=\underline{\underline{\frac{1}{19}}}$$

$$x=\frac{7-4y}{3} \overset{\text{Sijoitetaan } y}{=} \underline{\underline{\frac{43}{19}}}$$

Isompikin **lineaarinen** yhtälöryhmä ratkaistaan usein yhteenlaskukeinolla, jolloin yhtälöitä sopivasti kertomalla ja yhteenlaskemalla johdetaan toistuvasti uusia, aina yhtä yhtälöä pienempiä ryhmiä, joissa kussakin vaiheessa on eliminoitu yksi tuntematon lisää pois.

Laskusuoritusten seuraamisen helpottamiseksi yhtälöiden kertojat merkitään jälleen yhtälöiden kohdalle pystyviivojen taakse: ensimmäisen pystyviivan perässä ovat ne kertojat, joita käytetään ensimmäisen summayhtälön muodostamiseen, toisen pystyviivan perässä ovat ne kertojat, joita käytetään toisen summayhtälön muodostamiseen, sitten kolmannen jne. Vaikka kertomalla saatuja yhtälöitä ei kirjoitetakaan näkyviin, niin merkityt kertojat ilmoittavat, miten summayhtälöt on saatu.

Jos eliminoitavana oleva tuntematon puuttuu jostakin yhtälöstä, niin kyseinen yhtälö otetaan sellaisenaan mukaan uuteen ryhmään, minkä merkkinä pystyviivan perässä on vain yksi ykkönen ko. yhtälön kohdalla.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + y - 3z + 4u = 5 \\ 6x - y + 4z + 3u = 2 \\ 4x - 2y + z + 5u = 3 \\ 4x + 2y - 2z + 3u = 5 \end{cases}$.

Koska tuntemattoman y kertoimet $1, -1, -2$ ja 2 ovat "yhteensopivimmat", niin muodostamme ensin yhteenlaskukeinolla kolme yhtälöä, joista kaikista on eliminoitu tuntematon y. **On huomattava, että jokaista neljästä annetusta yhtälöstä on käytettävä ainakin kerran.** Eliminointia ei siis saa suorittaa siten, että ensin käytetään ensimmäistä ja toista yhtälöä, sitten ensimmäistä ja kolmatta ja lopuksi toista ja kolmatta yhtälöä. Tällöinhän neljäs yhtälö jäisi vallan huomiotta!

Numerointia (1) – (3) hyödynnetään myöhemmin.

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} 2x + y - 3z + 4u = 5 & \cdot 1 & \cdot 2 & \cdot(-2) \\ 6x - y + 4z + 3u = 2 & \cdot 1 & & \\ 4x - 2y + z + 5u = 3 & & \cdot 1 & \\ 4x + 2y - 2z + 3u = 5 & & & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} 8x + z + 7u = 7 & \cdot 1 & \\ 8x - 5z + 13u = 13 & \cdot(-1) & \\ 4z - 5u = -5 & & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l|l} 6z - 6u = -6 & \cdot 2 \\ 4z - 5u = -5 & \cdot(-3) \end{array}\right.$$

$$3u = 3 \Leftrightarrow u = 1$$

Numeroiduista yhtälöistä saadaan muut tuntemattomat yksitellen:

(1) $\therefore\quad z = \dfrac{-6 + 6u}{6} = \dfrac{-6 + 6 \cdot 1}{6} = 0$

(2) $\therefore\quad x = \dfrac{7 - z - 7u}{8} = \dfrac{7 - 0 - 7 \cdot 1}{8} = 0$

(3) $\therefore\quad y = 5 - 2x + 3z - 4u = 5 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 1$

Vastaus: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ u = 1 \end{cases}$

Huomautus. Vaikka edellisen yhtälöryhmän kertoimet ovat poikkeuksellisen mukavia kokonaislukuja, niin käsin suoritettuina laskut muodostuvat ikäviksi. **Koska laskujen suorittaminen ei yleensä mitenkään valaise itse sitä fysikaalista tai teknistä ongelmaa, johon ratkaistava yhtälöryhmä liittyy, niin käytännössä tällaiset yhtälöryhmät kannattaa tietenkin sekä ajan säästämiseksi että virheiden välttämiseksi suorittaa tehokkailla apuvälineillä.**

Tarkastelemme seuraavaksi vielä paria yhtälöryhmää, joiden käsin- ja laskinratkaisuissa ilmenee jotakin poikkeuksellista.

Esimerkki. Ratkaistaan yhteenlaskukeinolla seuraava ryhmä:

$$\begin{cases} -x+2y-3z=2 & \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ x-3y+4z=3 & \cdot 1 \\ x\quad -y+2z=-6 & \qquad \cdot 1 \end{cases}$$

Eliminoidaan tästä ryhmästä x, koska sillä on yhteensopivimmat kertoimet.

$$\begin{cases} -y\quad +z=5 & \cdot 1 \\ y\quad -z=-4 & \cdot 1 \end{cases}$$

Eliminoidaan tästä parista y, jolloin jäljelle yleensä jäisi vain tuntematonta z.

$$0z=1$$

Koska päädyimme mahdottomuuteen, niin ryhmällä ei ole ratkaisuja.

TI-laskin tulostaa tätä ryhmää ratkaistaessa ilmoituksen false.

Esimerkki. Ratkaistaan edellä ollut ryhmä uudelleen muuttaen kolmannen yhtälön vakiotermin -6 tilalle luku -7:

$$\begin{cases} -x+2y-3z=2 & \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ x-3y+4z=3 & \cdot 1 \\ x\quad -y+2z=-7 & \qquad \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y\quad +z=5 & \cdot 1 \\ y\quad -z=-5 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$0z=0$$

Viimeinen yhtälö toteutuu kaikilla z:n arvoilla. Muut tuntemattomat saadaan sijoittamalla z:n mielivaltainen arvo vaakaviivojen yläpuolella oleviin lähimpiin yhtälöihin: $y=z-5$ ja $x=y-2z-7=-z-12$.

Ratkaisuja on siis äärettömän monta ja vastaus voidaan antaa esimerkiksi

muodossa: $\begin{cases} z \text{ mielivaltainen} \\ x=-z-12 \\ y=z-5 \end{cases}$

Yksittäisiä ratkaisuja saadaan antamalla z:lle eri arvoja:

Jos esimerkiksi $z=0$, niin $x=-12$ ja $y=-5$.

Jos taas $z=-0.1$, niin $x=-11.9$ ja $y=-5.1$.

Huomautus. Laskimet voivat käyttää mielivaltaisen reaaliluvun tunnuksena esimerkiksi symboleja $c1$, $c2$, … ja mielivaltaisen kokonaisluvun tunnuksena symboleja $n1$, $n2$, … Tällainen laskin antaisi yo ryhmän ratkaisun muodossa

$$x=-c1-12 \quad \text{and} \quad y=c1-5 \quad \text{and} \quad z=c1,$$

missä $c1$ on mielivaltaisen luvun symboli, jonka paikalla voi hyvin joka paikassa olla vaikkapa $c2$. Pääasia on, että yhtä yksityisratkaisua muodostettaessa jokainen samalla indeksillä varustettu c-symboli korvataan samalla luvulla.

Esimerkki. Tulkitaan laskimen antama yhtälöryhmän ratkaisu

$$x = c4 \text{ and } y = c5 \text{ and } z = c4 + 3c5 \text{ and } t = 2c4 - c5 + 1 .$$

Ratkaisuja on äärettömän monta ja ne voidaan esittää seuraavasti:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y \text{ mielivaltainen} \\ z = x + 3y \\ t = 2x - y + 1 \end{cases}}}$$

Ryhmän yksittäisratkaisuja löydetään antamalla x:lle ja y:lle mielivaltaisia arvoja, jotka voivat olla keskenään joko yhtä suuria tai erisuuria. Seuraavassa on laskettu malliksi kolme yksittäisratkaisua:

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0 + 3 \cdot 0 = 0$, $t = 2 \cdot 0 - 0 + 1 = 1$ ja

$x = 0$, $y = 1$, $z = 0 + 3 \cdot 1 = 3$, $t = 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$ ja

$x = 2$, $y = -3$, $z = 2 + 3 \cdot (-3) = -7$, $t = 2 \cdot 2 - (-3) + 1 = 8$ jne ...

Harjoitustehtäviä

8.1.1 Ratkaise mahdollisimman monin eri tavoin

v) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + y = 3 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 7x - y = 4 \end{cases}$

8.1.2 Ratkaise sekä käsin että laskimella ryhmät

v) $\begin{cases} 3x - y + 5z = 2 \\ 7x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + y - 7z = 5 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ -3x - y + 2z = -7 \\ 5x + 2y - 4z = 12 \end{cases}$

8.1.3 Ratkaise sekä käsin että laskimella seuraavat poikkeukselliset ryhmät

v1) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x + 3y + z = 5 \end{cases}$ **v2)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x + 3y + z = 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ -3x - y + 2z = -7 \\ 5x + 2y - 5z = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ -3x - y + 2z = -7 \\ 5x + 2y - 5z = 11 \end{cases}$

8.1.4 Ratkaise käsin ja laskimella seuraavat ryhmät, joissa on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä.

v) $\begin{cases} 7x + y - z = 5 \\ 6x + y + z = 3 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 2x - 5y + z = 2 \\ x + 8y - 2z = 1 \end{cases}$

Opastus: Käsin laskiessasi esitä kaksi (helpoimmin ratkaistavaa) tuntematonta kolmannen avulla, jonka arvo saadaan valita mielivaltaisesti.

8.1.5 Ratkaise sekä käsin että laskimella seuraavat ryhmät, joissa on enemmän yhtälöitä kun tuntemattomia.

v1) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 13y = 30 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **v2)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 13y = 31 \\ x + y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 7x + 8y = 22 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 7x + 8y = 21 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

Opastus: Käsin laskiessasi ratkaise ensin mahdollisimman helppo osaryhmä, jossa yhtälöitä on sama määrä kuin tuntemattomiakin. Tutki lopuksi, toteuttaako löytämäsi ratkaisu käyttämättömän yhtälön. Laskimella laskiessasi voit ratkaista heti koko ryhmän.

8.1.6 Laskin TI-89 käyttää mielivaltaisille luvuille merkintöjä @1, @2, … sekä mielivaltaisille kokonaisluvuille merkintöjä @n1, @n2, … Tulkitse tämän laskimen antama ratkaisu tavallisemmassa muodossa ja kirjoita näkyviin kolme yksityisratkaisua, kun laskimen tuloste on

v1) $\begin{cases} x = @1 \\ y = @1 \end{cases}$ **v2)** $\begin{cases} x = @2 \\ y = @3 \\ z = @2 + @3 + 1 \end{cases}$ **v3)** $\begin{cases} x = @n4 \\ y = \pi \cdot @n4 \\ z = 3 \cdot @n4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = @5 \\ y = @6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = @7 \\ z = 2 \cdot @7 + 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2\pi \cdot @n8 \\ z = @n9 \end{cases}$

v4) Anna yksi ryhmän a ratkaisu, joka ei ole ryhmän **v1)** ratkaisu

v5) Onko ryhmillä **v2)** ja **b)** yhteistä ratkaisua (ts. sellaista ratkaisua, joka on molemmissa ryhmissä)?

v6) Onko ryhmillä **v3)** ja **c)** yhteistä ratkaisua?

8.1.7 Mitkä kaksi tai kolme seuraavien kohtien kolmesta ratkaisujoukosta sisältävät samat ratkaisut?

v) $\begin{cases} x = \text{mielivalt.} \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$, $\begin{cases} y = \text{mielivalt.} \\ x = 2y \\ z = 3y \end{cases}$, $\begin{cases} z = \text{mielivalt.} \\ x = z/3 \\ y = 2z/3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = \text{mielivalt.} \\ y = 2x \end{cases}$, $\begin{cases} y = \text{mielivalt.} \\ x = y/2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \text{mielivalt.} \\ y = x/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \text{mielivalt.} \\ y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y = \text{mielivalt.} \\ x = y - 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$, $\begin{cases} z = \text{mielivalt.} \\ x = z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$

8.2 Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen lukumääristä

Lineaarisen yhtälöryhmän kaikki yhtälöt ovat lineaarisia eli 1. asteen yhtälöitä. Tällöin yhtälöissä esiintyy vakiotermien lisäksi vain tuntemattomien ensimmäisen asteen termejä vakioilla kerrottuina, ei tuntemattomien muita potensseja, ei tuntemattomia sisältäviä funktioita eikä tuntemattomien sekatuloja kuten xy.

1. **Yhden tuntemattoman** lineaarinen yhtälö $a \cdot x = b$ (missä a eroaa nollasta) esittää yhtä lukusuoralla olevaa pistettä $x = b / a$.

Yhden tuntemattoman lineaarisella yhtälöparilla tai -ryhmällä ei yleensä ole ratkaisua, sillä vain poikkeustapauksissa yhtälöt ovat siten yhteensopivia, että yhden yhtälön ratkaisu toteuttaa muutkin yhtälöt.

Esimerkki. Yhden tuntemattoman lineaarisella yhtälöllä $2x = 5$ on yksi ratkaisu $x = 2.5$.

Yhden tuntemattoman lineaarisella yhtälöparilla $\begin{cases} 2x = 4 \\ 3x = 7 \end{cases}$ ei ole ratkaisua, koska ensimmäisen yhtälön ratkaisu $x = 2$ ei toteuta jälkimmäistä yhtälöä.

Yhden tuntemattoman lineaarisella yhtälöparilla $\begin{cases} 2x = 4 \\ 3x = 6 \end{cases}$ on poikkeuksellisesti ratkaisu, koska molemmilla yhtälöillä on sama ratkaisu $x = 2$.

2. **Kahden tuntemattoman** lineaarinen yhtälö $ax + by = c$ (missä a tai b tai molemmat eroaa nollasta) esittää jotakin xy-tason suoraa, joten kahden tuntemattoman yhdellä lineaarisella yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua, jotka edustavat suoran kaikkia pisteitä.

Kahden tuntemattoman lineaarinen yhtälöpari esittää kahden suoran yhteisiä pisteitä, joita tavallisesti on yksi, mutta poikkeustapauksissa 0 tai äärettömän monta. Ratkaisujen lukumäärä riippuu siitä, leikkaavatko suorat toisensa tai ovatko ne yhdensuuntaiset (olematta kuitenkaan sama suora) tai onko kyseessä sama suora.

Kahden tuntemattoman lineaarisella ryhmällä, jossa yhtälöitä on vähintään kolme, ei yleensä ole ratkaisua, sillä yleensä tason kolmella suoralla ei ole yhteisiä pisteitä. Poikkeustapauksissa ratkaisuja on 1 tai äärettömän monta, jos kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta tai ovat jopa sama suora.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman lineaarinen yhtälö $2x+y=1$ esittää suoraa, joten tällä yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua, jotka voidaan esittää muodossa $\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y = 1-2x \end{cases}$ tai muodossa $\begin{cases} y \text{ mielivaltainen} \\ x = (1-y)/2 \end{cases}$.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman lineaarisella yhtälöparilla $\begin{cases} 2x+y=1 \\ \;\;x-y=2 \end{cases}$ on yksi ratkaisu $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$, joka esittää kahden suoran leikkauspistettä.

Esimerkki. Yhtälöparilla $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y=-3-2x \end{cases}$ ei ole ratkaisua, koska yhtälöiden esittämät suorat ovat yhdensuuntaiset olematta sama suora.

Esimerkki. Yhtälöparilla $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y=1-2x \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua, koska yhtälöt esittävät samaa suoraa. Ratkaisut voidaan esittää esimerkiksi muodossa $\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y = 1-2x \end{cases}$.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman lineaarisella ryhmällä $\begin{cases} 2x+y=1 \\ \;\;x-y=2 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ ei ole ratkaisua, sillä kahden ensimmäisen suoran leikkauspiste $(1,-1)$ ei ole kolmannella suoralla.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman lineaarisella ryhmällä $\begin{cases} 2x+y=1 \\ \;\;x-y=2 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ on ratkaisu $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$, sillä kahden ensimmäisen suoran leikkauspiste $(1,-1)$ on kolmannella suoralla.

Esimerkki. Kahden tuntemattoman lineaarisella ryhmällä $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y=-2x+1 \\ x=0.5-0.5y \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua, koska kaikki yhtälöt esittävät samaa suoraa.

3. **Kolmen tuntemattoman** lineaarinen yhtälö $ax+by+cz=d$ (missä ainakin yksi kertoimista *a, b* ja *c* eroaa nollasta) esittää avaruudessa olevaa tasoa, joten tällä yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua, jotka esittävät kyseisen tason pisteitä. Jos esimerkiksi $c\neq 0$, niin tason pisteen korkeusasema *xy*-tason pisteen $(x,y,0)$ kohdalla saadaan em yhtälöstä $z=\dfrac{d-ax-by}{c}$.

Kolmen tuntemattoman lineaarinen yhtälöpari $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \end{cases}$ esittää kahden tason yhteisiä pisteitä, jotka tavallisesti muodostavat tasojen leikkaussuoran. Poikkeustapauksessa tasot voivat olla yhdensuuntaiset tai jopa sama taso. Tällä yhtälöparilla on siis tavallisesti äärettömän monta ratkaisua (vastaten tasojen leikkaussuoraa tai samaa tasoa) tai poikkeustapauksissa parilla ei ole yhtään ratkaisua (vastaten yhdensuuntaisten mutta eri tasojen tapausta).

Kolmen tuntemattoman lineaarinen yhtälöryhmä $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \\ ix+jy+kz=l \end{cases}$ esittää kolmen tason yhteisiä pisteitä, joita tavallisesti on 1 tai poikkeustapauksissa 0 tai äärettömän monta. Tavallisin tapaus on se, jossa kahden ensimmäisen tason määräämä leikkaussuora puhkaisee kolmannen tason yhdessä pisteessä. Poikkeustapaukset liittyvät esimerkiksi sellaisiin tilanteisiin, joissa

- ainakin kaksi tasoista ovat yhdensuuntaisia olematta sama taso, jolloin tasoilla ei tietenkään ole yhteisiä pisteitä
- kaikki kolme tasoa kulkevat saman suoran kautta, jolloin tasot muodostavat eräänlaisen siipirattaan ja tasoilla on äärettömän monta yhteistä pistettä, jotka sijaitsevat siipirattaan akselilla.

Jos kolmen tuntemattoman lineaarisessa ryhmässä on enemmän kuin kolme yhtälöä, niin ryhmällä ei tavallisesti ole ratkaisua, koska on melkoinen sattuma, jos kolmen ensimmäisen tason yhteinen leikkauspiste osuu neljännelle tasolle. Poikkeustapauksessa tällaisella ryhmällä voi olla 1 tai äärettömän monta ratkaisua. Yksi ratkaisu saadaan esimerkiksi tapauksessa, jossa kolmen ensimmäisen tason leikkauspiste on sattumalta neljännelläkin tasolla. Äärettömän monta ratkaisua saadaan tapauksessa, jossa kaikki tasot kulkevat saman suoran kautta muodostaen taas "siipirattaan".

4. Edellä suoritettua tarkastelua voitaisiin jatkaa useampiakin tuntemattomia käsittäviin lineaarisiin yhtälöryhmiin. Muuttujien *x*, *y*, z, … lukumäärä ja muuttujia koskevien lineaaristen yhtälöiden lukumäärä luonnehtivat mahdollisten ratkaisujen lukumäärää seuraavan yhteenvedon mukaisesti.

Yleisesti voidaan todeta, että

- **Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko 0, 1 tai ∞ ratkaisua. Ratkaisuja ei milloinkaan ole 2, 3, 4, …**
- **Jos lineaarisessa ryhmässä on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta, niin ryhmällä on tavallisesti 1 ratkaisu, poikkeustapauksissa ratkaisuja voi olla 0 tai ∞.**
- **Jos lineaarisessa ryhmässä on yhtälöitä enemmän kuin tuntemattomia, niin ryhmällä on tavallisesti 0 ratkaisua, poikkeustapauksissa ratkaisuja voi olla 1 tai ∞.**
- **Jos lineaarisessa ryhmässä on yhtälöitä vähemmän kuin tuntemattomia, niin ryhmällä on tavallisesti ∞ ratkaisua, poikkeustapauksissa 0 ratkaisua (ei kuitenkaan yhtä ratkaisua! Vertaa: kahdella tasolla ei voi olla tarkalleen yhtä yhteistä pistettä.)**

Harjoitustehtäviä

8.2.1 Montako ratkaisua voi olla lineaarisella yhtälöryhmällä?

8.2.2 Täydennä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen määrää esittävä taulukko:

	Ratkaisujen tavallisin määrä	Ratkaisujen muut mahdolliset määrät
Tuntemattomia enemmän kuin yhtälöitä		
Tuntemattomia ja yhtälöitä sama määrä		
Tuntemattomia vähemmän kuin yhtälöitä		

8.2.3 Mikäli mahdollista valitse seuraavissa yhtälöryhmissä kertoimille *a*, *b*, *c*, … jotkin sellaiset arvot, että ryhmällä (i) on yksikäsitteinen ratkaisu (ii) on äärettömän monta ratkaisua (iii) ei ole yhtään ratkaisua. Kirjoita myös ryhmän ratkaisu kyseisillä kertoimien arvoilla.

v1) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+ay=b \end{cases}$ **v2)** $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=5 \\ 3x+5y=c \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} x+2y=3 \\ dx+5y=e \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 5x+6y=17 \\ 3x+3y=f \end{cases}$

8.2.4 Mikäli mahdollista keksi lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on
a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** ∞ ratkaisua.

8.2.5 Hahmottele muuttujia *x*, *y* ja *z* koskevien yhtälöiden esittämiä tasoja erityisesti avaruuden positiivisessa osassa tutkimalla, missä tasot (mahdollisesti) leikkaavat koordinaattiakselit:

v1) $2x+3y+4z=12$ **v2)** $x+y-z=2$ **v3)** $y+2z=4$

a) $x+2y+3z=6$ **b)** $2x+3y=6$ **c)** $x=3$ **d)** $z=2$

8.3 Epälineaarisista yhtälöryhmistä

Yhtälöryhmää sanotaan epälineaariseksi, jos ainakin yksi ryhmän yhtälöistä on epälineaarinen. Yhtälö on epälineaarinen, jos siinä esiintyy tuntemattoman jokin muu kuin ensimmäinen potenssi (x^2, $1/x$, $\sqrt{x}$, ...) tai tuntemattomien tulo ($x \cdot y$, ...) tai tuntematonta sisältävä funktio ($\sin x$, $\ln(x+y)$, ...).

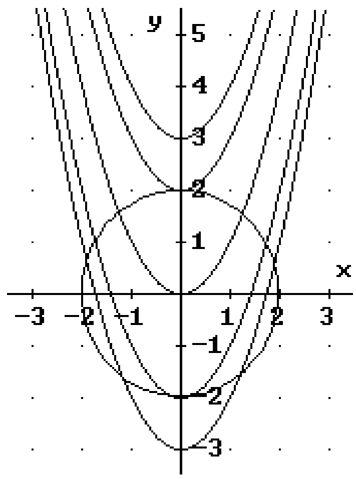
Kahden tuntemattoman epälineaarinen yhtälö esittää yleensä jotakin tasossa olevaa kaarevaa viivaa. Kahden tuntemattoman epälineaarinen yhtälöpari esittää kahden tällaisen viivan yhteisiä pisteitä, joita voi olla 0, 1, 2, 3, … , ∞ .

Vastaavasti kolmen tuntemattoman epälineaarinen yhtälö esittää yleensä jotakin avaruudessa olevaa kaarevaa pintaa. Kolmen tuntemattoman epälineaarinen yhtälöpari esittää kahden tällaisen kaarevan pinnan yhteisiä pisteitä, jotka tavallisimmin muodostavat jonkin viivan, mutta yhteiset pisteet voivat olla erillisiäkin pisteitä, joita on 0, 1, 2, … , ∞ . Yhtälöiden lukumäärän kasvaessa ratkaisujen määrä luonnollisesti yleensä vähenee.

Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi ei ole yleistä algoritmia, vaikkakin epälineaarisen ryhmän saa toisinaan ratkaistua esimerkiksi sijoitusmenetelmällä tai laskimella tai tietokoneella.

Huomautus. Epälineaarisen ryhmän ratkaisujen määrä voi olla
0, 1, 2, 3, 4, …,∞ .

Esimerkki. Kuva esittää 2-säteistä ympyrää $x^2 + y^2 = 4$ ja ylöspäin aukeavia paraabeleja $y = x^2 + c$, missä c saa arvot 3, 2, 0, –2 ja –3 siirryttäessä ylimmältä paraabelilta alimmalle.



Kuvasta selviää yhtälöparien a - e) ratkaisujen lukumäärät:

a) Parilla $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ ei ole ratkaisua.

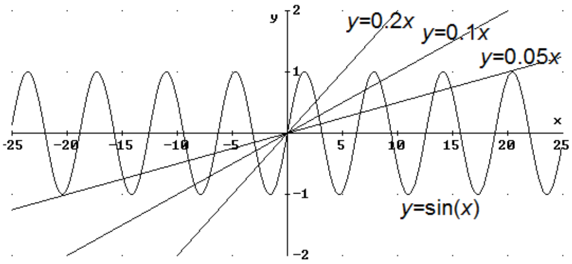
b) Parilla $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ on yksi ratkaisu $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

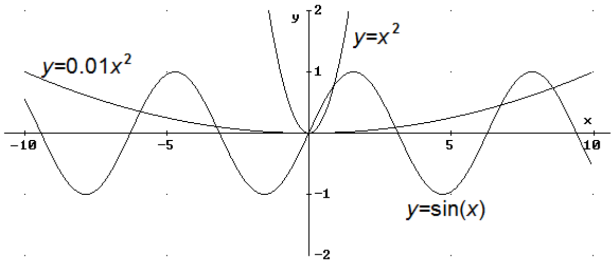
c) Parilla $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ on kaksi ratkaisua $\begin{cases} x \approx \pm 1.25 \\ y \approx 1.56 \end{cases}$.

d) Parilla $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ on kolme ratkaisua $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \\ y_{2,3} = 1 \end{cases}$.

e) Parilla $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ on neljä ratkaisua $\begin{cases} x_{1,2} \approx \pm 1.9 \\ y_{1,2} \approx 0.6 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{3,4} \approx \pm 1.2 \\ y_{3,4} \approx -1.6 \end{cases}$.

Esimerkki. Muuttamalla kuvan mukaisesti suoran $y = kx$ kulmakerrointa k tai paraabelin $y = ax^2$ muotokerrointa a on helppo nähdä, että epälineaarisella yhtälöparilla voi olla mikä määrä ratkaisuja tahansa:





a) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = 0.2x \end{cases}$ on 3 ratkaisua

e) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = x^2 \end{cases}$ on 2 ratkaisua

b) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = 0.1x \end{cases}$ on 7 ratkaisua

f) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = 0.01x^2 \end{cases}$ on 6 ratkaisua

c) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = 0.05x \end{cases}$ on 11 ratkaisua.

d) Parilla $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = 0 \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua $\begin{cases} x = n \cdot \pi \\ y = 0 \end{cases}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Harjoitustehtäviä

8.3.1 Keksi (vaikkapa laskimellasi kokeillen) yhtälöpari, jolla on **v)** 8 **a)** 10 ratkaisua.

8.4 Käytännön sovelluksia

Jotta sovellustehtävän ratkaisun lukija voisi ymmärtää yhtälöryhmiä hyödyntävän ongelmanratkaisun, niin sekä tunnetuille että varsinkin tuntemattomille suureille käytetyt merkinnät on selvitettävä ratkaisun aluksi.

Lisäksi yhtälöiden sisältö on selitettävä sanallisesti siten, että kirjoittaja itse ja lukija ymmärtävät yhtälöiden sisällön ja perusteet.

Yhtälöryhmän voi hyvin ratkaista laskimella, kunhan kirjoittaa sekä syötteen että laskimen tulosteen yksityiskohtaisesti näkyviin.

Lopuksi tehtävän vastaus on esitettävä helposti ymmärrettävässä muodossa kiinnittäen huomiota ratkaisujen fysikaaliseen mielekkyyteen.

Esimerkki. Määritä isän ja pojan iät, kun nyt isä on viisi kertaa pojan ikäinen ja 32 vuoden kuluttua heidän yhteisikänsä on 100 vuotta.

Ratkaisu. Käytettävät merkinnät voi selventää esimerkiksi taulukolla

	Isä	Poika
Nyt	x	y
32 v kuluttua	$x+32$	$y+32$

.

Esimerkin tiedoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}\text{Nyt isä on 5 kertaa niin vanha kuin poika.}\\ \text{32 vuoden kuluttua heidän yhteisikänsä on 100 v.}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ (x+32)+(y+32)=100 \end{cases} \overset{\text{laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 30 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Vastaus: Isän ja pojat iät ovat nyt $\underline{\underline{\text{30 vuotta ja 6 vuotta}}}$.

Esimerkki. Määritä veneen ja virran nopeudet, kun vene kulkee 50 km matkan myötävirtaan 0.75 tunnissa ja vastavirtaan 2.0 tunnissa.

Ratkaisu. $\boxed{\text{Olkoon veneen nopeus virrattomassa vedessä } x \text{ ja virran nopeus } y.}$

Yksiköinä käytetään kilometriä ja tuntia. Esimerkin perusteella saadaan yhtälöt

$$\boxed{\begin{cases}\text{Vene kulkee 0.75 tunnissa myötävirtaan 50 km.}\\ \text{Vene kulkee 2 tunnissa vastavirtaan 50 km.}\end{cases}} \quad \Bigg| \begin{matrix}\text{aika}\cdot\text{nopeus}\\ =\text{matka}\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.75\cdot(x+y)=50 \\ 2\cdot(x-y)=50 \end{cases} \overset{\text{laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 45.833 \\ y = 20.833 \end{cases}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\begin{cases}\text{Veneen nopeus on 46 km/h}\\ \text{Virran nopeus on 21 km/h}\end{cases}}}$

Esimerkki. Kuinka paljon puhdasta vettä ja taulukon mukaisia sokeri-suola-vesiliuoksia on sekoitettava keskenään, jotta saataisiin 1000 g liuosta, jonka sokeri- ja suolapitoisuudet ovat vastaavasti 2.5 ja 13 prosenttia?

	Sokeripitoisuus	Suolapitoisuus
Liuos 1	2.0 %	20 %
Liuos 2	5.0 %	10 %

Ratkaisu. Merkitään

$x =$ tarvittavan puhtaan veden massa
$y =$ tarvittavan liuoksen 1 massa
$z =$ tarvittavan liuoksen 2 massa.

Yhtälöt muodostetaan seuraavista ehdoista:

$$\begin{cases} \text{Veden sekä liuosten 1 ja 2 massojen summa} = 1000\text{ g} \\ \text{Sokerin massa liuoksessa 1} + \text{sokerin massa liuoksessa 2} \\ \qquad = \text{sokerin massa lopullisessa liuoksessa} \\ \text{Suolan massa liuoksessa 1} + \text{suolan massa liuoksessa 2} \\ \qquad = \text{suolan massa lopullisessa liuoksessa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ \frac{2}{100}y + \frac{5}{100}z = \frac{2.5}{100}\cdot 1000 \\ \frac{20}{100}y + \frac{10}{100}z = \frac{13}{100}\cdot 1000 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 200 \\ y = 500 \\ z = 300 \end{cases}$$

Vastaus: Haluttu liuos saadaan sekoittamalla
200 g puhdasta vettä, 500 g liuosta 1 ja 300 g liuosta 2.

Esimerkki. Vesisäiliö voidaan täyttää kolmesta eri hanasta X, Y ja Z. Säiliön täyttymiseen kuluu kahdelta hanalta X ja Y (tai X ja Z tai Y ja Z) vastaavasti 280 (tai 200 tai 175) sekuntia. Kauanko säiliön täyttäminen kestää kaikkia kolmea hanaa käytettäessä? Hanojen tilavuusvirrat oletetaan vakioiksi ja riippumattomiksi muiden hanojen toiminnasta.

Ratkaisu. Olkoon säiliön tilavuus V sekä hanojen tilavuusvirrat x, y ja z (yksikkönä esimerkiksi litraa sekunnissa). Merkitään säiliön täyttymisaikaa kaikkia hanoja käytettäessä t:llä.

Säiliön tilavuutta ei voi laskea, mutta muut tuntemattomat x, y, z ja t voidaan ratkaista osin tilavuuden V lausekkeina seuraavien neljän ehdon avulla:

$$\begin{cases} \text{280 sekunnissa hanoista X ja Y virtaa säiliöllinen vettä.} \\ \text{200 sekunnissa hanoista X ja Z virtaa säiliöllinen vettä.} \\ \text{175 sekunnissa hanoista Y ja Z virtaa säiliöllinen vettä.} \\ \text{Ajassa } t \text{ hanoista X, Y ja Z virtaa säiliöllinen vettä.} \end{cases}$$

Koska aika $*$ tilavuusvirta $=$ tilavuus, niin

$$\begin{cases} 280(x+y)=V \\ 200(x+z)=V \\ 175(y+z)=V \\ t\cdot(x+y+z)=V \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=V/700 \\ y=3V/1400 \\ z=V/280 \\ t=140 \end{cases}$$

Vastaus: Säiliön täyttäminen kaikkia hanoja käyttäen kestää $\underline{\underline{\text{140 sekuntia}}}$.

Esimerkki. Lavuaarin tilavuus on 24 litraa. Jos kylmä- ja kuumavesihanat sekä pohjaventtiili ovat kaikki auki, niin lavuaari täyttyy 160 sekunnissa. Jos vain kylmävesihana ja pohjaventtiili ovat auki, niin lavuaari täyttyy 480 sekunnissa. Jos vain kuumavesihana ja pohjaventtiili ovat auki, niin aluksi täysi lavuaari tyhjenee 160 sekunnissa.

Millä nopeudella vettä tulee kylmä- ja kuumavesihanoista ja millä nopeudella vettä poistuu pohjaventtiilistä? Tilavuusvirrat oletetaan koko ajan vakioiksi.

Ratkaisu. Laskut suoritetaan käyttäen yksiköitä litra ja sekunti, mutta yksinkertaisuuden vuoksi yksiköitä ei merkitä näkyviin.

Merkitään tilavuusvirtoja seuraavasti:

$x =$ kylmävesihanan tilavuusvirta
$y =$ kuumavesihanan tilavuusvirta
$z =$ pohjaventtiilin tilavuusvirta
Huom: Myös pohjaventtiilin tilavuusvirta pidetään positiivisena

(Pohjaventtiilin tilavuusvirtaa voitaisiin pitää myös negatiivisena, jos myöhemmin kirjoitettavissa yhtälöissä muutettaisiin z:n edessä oleva merkki.)

Esimerkin tiedoista saadaan yhtälöryhmä

160 sekunnissa kylmä- ja kuumavesihanoista tuleva miinus pohjaventiilistä poistuva vesi lisää lavuaarin vettä 24 litraa
480 sekunnissa kylmävesihanasta tuleva miinus pohjaventtiilistä poistuva vesi lisää lavuaarin vettä 24 litraa
160 sekunnissa kuumavesihanasta tuleva miinus pohjaventtiilistä poistuva vesi <u>vähentää</u> lavuaarin vettä 24 litraa

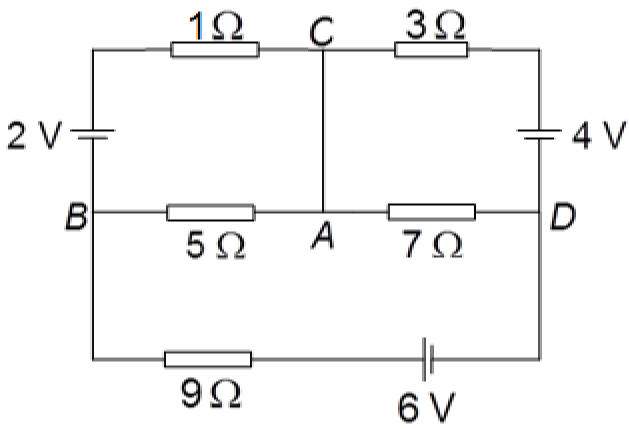
$$\begin{cases} 160(x+y-z)=24 \\ 480(x-z)=24 \\ 160(y-z)=-24 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0.3 \\ y=0.1 \\ z=0.25 \end{cases}$$

Vastaus:
Kylmävesihanasta vettä tulee nopeudella 0.30 l/s
Kuumavesihanasta vettä tulee nopeudella 0.10 l/s
Pohjaventtiilistä vettä poistuu nopeudella 0.25 l/s

Huomautus: Edellisen esimerkin kaltaisessa tehtävässä on selvästi korostettava merkintöjen tarkoitusta: Kuvaavatko *x*, *y* ja *z* eri laitteiden tilavuusvirtoja vai esimerkiksi lavuaarin täyttymiseen tai tyhjenemiseen kuluvaa aikaa kyseisellä laitteella. Samoin positiiviseksi tulkitun virtauksen suunta on selvästi sovittava.

Mikäli merkintöjen tarkoitus jää laskijalle itselleenkin epäselväksi, niin yhtälöryhmän muodostaminen ja sen ratkaisun tulkinta jäävät puhtaan arvauksen tasolle, vaikka laskijalla olisikin käytettävissään parhaat tietokoneet yhtälöiden ratkaisemiseksi.

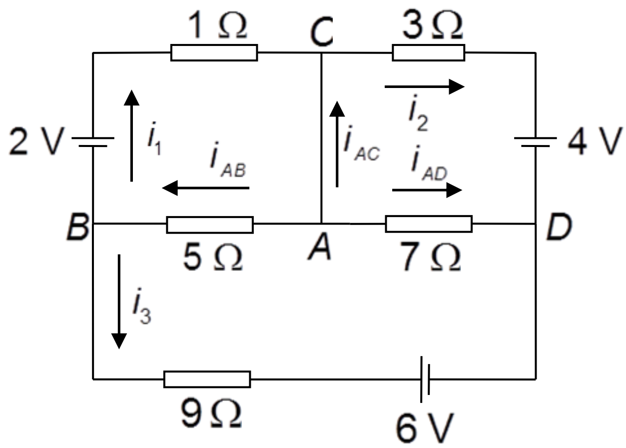
Esimerkki. Kuinka suuret virrat kulkevat kuvan virtapiirissä pisteestä *A* suoraan pisteisiin *B*, *C* ja *D*? Oletetaan, että annetut arvot tunnetaan neljän numeron tarkkuudella.



Merkitään kuvan mukaisia virtoja $i_{AB}, i_{AC}, i_{AD}, i_1, i_2, i_3$. Näiden kuuden virran ratkaisemiseksi tarvitaan kuusi yhtälöä.

Kolme yhtälöä saadaan Kirchoffin virtalaista, jonka mukaan solmupisteeseen tulevien virtojen summa on yhtä suuri kuin kyseisestä pisteestä poistuvien virtojen summa.

Loput yhtälöt saadaan Kirchoffin jännitelaista, jonka mukaan potentiaalierojen summa kierrettäessä suljetun virtapiirin ympäri on nolla.

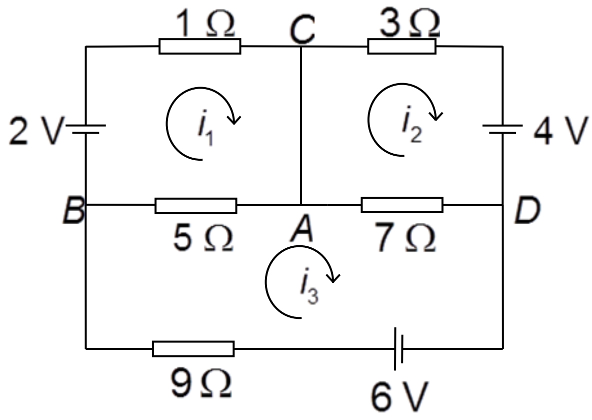


Silmukat kierretään myötäpäivään alkaen kunkin silmukan vasemmasta alanurkasta.

$$\begin{cases} \text{Piste } B & i_{AB} = i_1 + i_3 \\ \text{Piste } C & i_{AC} + i_1 = i_2 \\ \text{Piste } D & i_{AD} + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{Vasen yläsilmukka} & 2 - 1i_1 - 5i_{AB} = 0 \\ \text{Oikea yläsilmukka} & -3i_2 - 4 + 7i_{AD} = 0 \\ \text{Alasilmukka} & 5i_{AB} - 7i_{AD} + 6 + 9i_3 = 0 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \underline{\underline{i_{AB} = 0.2654}} \\ \underline{\underline{i_{AC} = -0.7877}} \\ \underline{\underline{i_{AD} = 0.5223}} \\ i_1 = 0.6732 \\ i_2 = -0.1145 \\ i_3 = -0.4078 \end{cases}$$

Toinen ratkaisu:

Tuntemattomien virtojen määrää ja samalla yhtälöryhmän kokoa voidaan pienentää ajattelemalla, että virtapiirin pienimmissä silmukoissa kulkee myötäpäivään viereiseen kuvaan merkityt silmukkavirrat i_1, i_2 ja i_3.



Seuraavassa jokainen pikkusilmukka kierretään myötäpäivään alkaen vasemmasta alakulmasta muodostaen samalla yhtälö periaatteella

Potentiaalierojen summa on nolla kierrettäessä suljettu virtapiiri.

$$\begin{cases} \text{Vasen yläsilmukka} & 2-1i_1+5(i_3-i_1)=0 \\ \text{Oikea yläsilmukka} & -3i_2-4+7(i_3-i_2)=0 \\ \text{Alasilmukka} & 5(i_1-i_3)+7(i_2-i_3)+6-9i_3=0 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} i_1=0.6732 \\ i_2=-0.1145 \\ i_3=0.4078 \end{cases}$$

Vastaus: Kysytyt virrat ovat $\begin{cases} i_{AB}=i_1-i_3=0.2654 \text{ A} \\ i_{AC}=-i_1+i_2=-0.7877 \text{ A} \\ i_{AD}=-i_2+i_3=0.5223 \text{ A} \end{cases}$

Huomaa, että silmukkavirtojen mahdollinen virheellisyys todennäköisesti paljastuu, jos testaat toteuttavatko löytämäsi silmukkavirtojen arvot (riittävällä tarkkuudella) myös sen yhtälön, joka saadaan kiertämällä koko virtapiiri ulkokehää pitkin. Kierrämme nyt tarkistuksen vuoksi esimerkin virtapiirin myötäpäivään alkaen pisteestä B, jolloin edellä laskettuja arvoja käyttäen saadaan

$$2-1\cdot i_1-3\cdot i_2-4+6-9\cdot i_3=0.0001\approx 0$$

kuten pitääkin.

Harjoitustehtäviä

8.4.1 Määritä selvin merkinnöin isän ja pojan nykyiset iät, kun

v) nyt isä on neljä kertaa niin vanha kuin poika, mutta 16 vuoden kuluttua poika on jo puolet isän iästä.

a) nyt isä on 11 kertaa niin vanha kuin poika, mutta seitsemän vuoden kuluttua isä on vain neljä kertaa niin vanha kuin poika.

b) kuusi vuotta sitten isä oli viisi kertaa pojan ikäinen ja 12 vuoden kuluttua isä on kaksi kertaa pojan ikäinen.

8.4.2 Sinun pitää kulkea 4.00 km pituinen matka täsmälleen 30 minuutissa. Kuinka pitkät matkat sinun on

v) juostava nopeudella 10.0 km/h ja käveltävä nopeudella 4.00 km/h?

a) juostava nopeudella 8.0 km/h ja käveltävä nopeudella 5.0 km/h?

8.4.3 Määritä suorakulmion sivut, kun sen ala on 1234 mm^2 ja piiri on
v) 234 mm **a)** 204 mm **b)** 135 mm.

8.4.4 Määritä suorakulmaisen kolmion sivut, kun
v) kolmion ala on 50.0 mm^2 ja piiri 40.0 mm
a) kolmion ala on 150 mm^2 ja piiri 60.0 mm
b) kolmion ala on 150 mm^2 ja piiri 57.0 mm.

8.4.5 Paljonko on sekoitettava
v) 12.3- ja 32.1- prosenttisia suolaliuoksia, jotta saataisiin yhteensä 43.2 kg 23.4-prosenttista suolaliuosta?
a) 23.4- ja 56.7- prosenttisia suolaliuoksia, jotta saataisiin yhteensä 34.5 kg 54.3-prosenttista suolaliuosta?

8.4.6 Tässä tehtävässä tarkastellaan seuraavia liuoksia:

	Suolapitoisuus	Sokeripitoisuus
Liuos 1	5.0 %	20.0 %
Liuos 2	10.0 %	10.0 %
Liuos 3	15.0 %	5.0 %

Miten voit näistä liuoksista sekoittaa 25,0 kg liuosta, jonka suola- ja sokeripitoisuudet ovat vastaavasti
v1) 9.0 % ja 12.5 % **v2)** 12.0 % ja 15.0 %
a) 11.0 % ja 10.0 % **b)** 10.0 % ja 11.0 % ?

Miten voit liuoksista 1 ja 2 sekä vedestä sekoittaa 75,0 kg liuosta, jonka suola- ja sokeripitoisuudet ovat vastaavasti
v3) 6.0 % ja 12.0 % **c)** 4.0 % ja 5.0 % ?

Miten voit liuoksista 1 ja 2 vettä haihduttamalla muodostaa 2.5 kg liuosta, jonka suola- ja sokeripitoisuudet ovat
v4) 15.0 % ja 25.0 % **d)** 10.0 % ja 30.0 % ?

8.4.7 Jos kylmä- ja kuumavesihanat ovat täysin auki, niin astian täyttyminen kestää 200 s. Jos kuumavesihana on täysin auki ja kylmävesihanan virtaus on tasan **v)** puolet **a)** kolmasosa
täydestä virtauksesta, niin astian täyttyminen kestää 300 s. Kauanko astian täyttyminen pelkästä kuumavesihanasta kestää?

8.4.8 Suuri säiliö voidaan täyttää toisistaan riippumatta neljästä eri hanasta A, B, C ja D. Tiedetään, että säiliön täyttäminen
- hanoja A, B ja C samanaikaisesta käyttäen kestää 20.8 t
- hanoja C ja D samanaikaisesti käyttäen kestää 17.8 t
- hanoja A ja B samanaikaisesti käyttäen kestää 41.7 t
- hanoja A ja D samanaikaisesti käyttäen kestää yhtä kauan kuin hanoja B ja C samanaikaisesti käyttäen.

Kuinka kauan säiliön täyttäminen kestää kaikkia hanoja käyttäen?

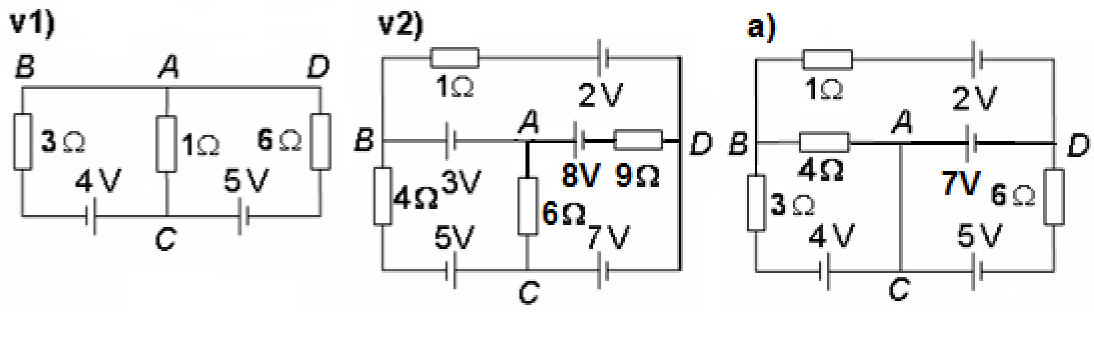
8.4.9 Säiliön tilavuus on 35 litraa. Jos kylmä- ja kuumavesihanat ovat molemmat auki ja pohjaventtiili kiinni, niin säiliö täyttyy 70 sekunnissa. Jos kylmävesihana ja pohjaventtiili ovat auki, niin säiliö täyttyy 175 sekunnissa. Jos taas kuumavesihana ja pohjaventtiili ovat auki, niin
v) alun perin täysi säiliö tyhjenee 350 sekunnissa.
a) alun perin tyhjä säiliö täyttyy 350 sekunnissa.
Kauanko säiliön täyttyminen kestää, jos molemmat hanat ja pohjaventtiili ovat auki?

8.4.10 Kahdeksanhenkisen seurueen on päästävä mahdollisimman nopeasti ja samanaikaisesti perille 20 km päässä olevaan kohteeseen. Heillä on varattuna yksi taksi, johon mahtuu vain neljä seurueen jäsentä kerrallaan. Miten heidän kannattaa suunnitella matkansa, kun
v) heidän kävelynopeutensa on 6,0 km/h ja taksin etenemisnopeus on ruuhkasta johtuen vain 20 km/h
a**)** heidän kävelynopeutensa on 8,0 km/h ja taksin etenemisnopeus on ruuhkasta johtuen vain 15 km/h?

8.4.11 Samalla kirjaimella varustetuissa laatikoissa on aina sama luku. Määritä kaikkien laatikoiden lukujen summa, kun neljän eri vaaka- tai pystyrivin lukujen summat on merkitty kyseisten rivien jatkeille.

A	A	C	B	98
C	B	B	D	
B	B	D	A	
A	C	C	D	106
	100		104	

8.4.12 Määritä kussakin virtapiirissä pisteestä *A* suoraan lähimpiin pisteisiin *B*, *C* ja *D* suuntautuvat virrat milliampeerin tarkkuudella. Tarkista tuloksesi ottamalla mukaan yksi ylimääräinen yhtälö.



9. EPÄYHTÄLÖISTÄ

9.1 Yleisiä ratkaisuperiaatteita

Esimerkki. Epäyhtälöä $2x+3 > 7$ ratkaistaessa haetaan kaikkia niitä lukuja x, joilla kirjoitelma on voimassa. Tämä 1. asteen epäyhtälö (mutta ei kuitenkaan kaikkia epäyhtälöitä) ratkaistaan samalla tavalla kuin vastaava yhtälö:

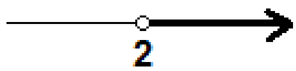
$2x + 3 > 7$	vähennetään epäyhtälön kummaltakin puolelta sama luku 3 ts. siirretään termi 3 epäyhtälön toiselle puolelle vaihtaen sen merkki
$\Leftrightarrow \quad 2x > 7 - 3$	jaetaan epäyhtälön molemmat puolet kertoimella 2
$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x > 2}}$	

Saadun vastauksen voimassaoloa voidaan testata pistokokein:

Jos esimerkiksi $x = 2.5$, niin alkuperäisen epäyhtälön vasen puoli $vp = 2 \cdot 2.5 + 3 = 8$ ja epäyhtälö toteutuu.

Jos taas $x = 2$, niin $vp = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ eikä epäyhtälö toteudukaan.

Edellä saatua ratkaisua voidaan havainnollistaa merkitsemällä ratkaisupisteet tummennettuina lukusuoralle:



Tummennetun ratkaisuvälin päätepisteenä käytetty avoin pallo korostaa sitä, että päätepiste ei kuulu mukaan ratkaisujoukkoon. Umpinaisena pallona merkitty päätepiste puolestaan kuuluu joukkoon.

Esimerkki. Viereisessä kuvassa luku 3 kuuluu havainnollistettavaan joukkoon, mutta luku 1 ei kuulu. Kuvan havainnollistamassa tapauksessa ratkaisu käsittää siis kaikki kaksoisepäyhtälön $1 < x \leq 3$ toteuttavat luvut x.

Symboliset laskimet ilmoittavat epäyhtälön ratkaisut tavallisesti helppojen epäyhtälöiden avulla. Useimmiten näin menetellään myös epäyhtälöitä käsinkin ratkaistaessa. Tarvittaessa vastausta voi tietenkin myös havainnollistaa merkitsemällä ratkaisut lukusuoralle edellä esitetyllä tavalla.

Esimerkki. Seuraavassa taulukossa on esitetty epäyhtälöiden tavallisimpia vastausvaihtoehtoja tulkintoineen.

Vastaus	Ratkaisuiksi kelpaavat luvut	Sama vastaus epätavallisemmin merkittynä
$x > 2$	Lukua 2 suuremmat luvut	$2 < x$
$x \geq 2$	Luku 2 ja sitä suuremmat luvut	$2 \leq x$
$x < 2$	Lukua 2 pienemmät luvut	$2 > x$
$x \leq 2$	Luku 2 ja sitä pienemmät luvut	$2 \geq x$
$1 < x < 3$	Lukujen 1 ja 3 välillä olevat luvut	$3 > x > 1$
$1 \leq x < 3$	Luku 1 ja lukujen 1 ja 3 välillä olevat luvut	$3 > x \geq 1$
$x < 1$ tai $x > 3$	Luvut, jotka ovat pienempiä kuin 1, sekä luvut, jotka ovat suurempia kuin 3	$x < 1 \vee x > 3$ tai myös $x > 3$ tai $x < 1$

Epäyhtälöitä ratkaistaessa on tarpeen ymmärtää ja muistaa seuraavassa huomautuksessa esitetty tosiasia.

Huomautus. Negatiivisella luvulla kerrottaessa tai jaettaessa lukujen suuruusjärjestys vaihtuu päinvastaiseksi.

Esimerkki. Perustelemme edellä esitettyä väitettä seuraavin esimerkein:

$$\begin{array}{rl} 2 < 4 & \mid \cdot(-2) \\ -4 > -8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -2 < 4 & \mid \cdot(-2) \\ 4 > -8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -4 < -2 & \mid \cdot(-2) \\ 8 > 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2 < 4 & \mid :(-2) \\ -1 > -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -2 < 4 & \mid :(-2) \\ 1 > -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -4 < -2 & \mid :(-2) \\ 2 > 1 & \end{array}$$

Huomautus. Lausekkeiden suuruuksia pääteltäessä on muutenkin oltava erityisen varovainen, sillä esimerkiksi

- on olemassa sellaisia lukuja, että suuremman luvun neliö on pienempi kuin pienemmän luvun neliö
- on olemassa sellaisia lukuja, että suuremman luvun käänteisluku on suurempi kuin pienemmän luvun käänteisluku
- on olemassa murtolausekkeita, jotka pienenevät osoittajan kasvaessa.

Koska negatiivisella luvulla kertominen ja jakaminen vaihtavat lukujen suuruusjärjestyksen, niin epäyhtälöiden ratkaiseminen eroaa yhtälöiden ratkaisemisesta negatiivisella luvalla kerrottaessa tai jaettaessa kuten seuraavista ratkaisuohjeista viimeisessä todetaan:

Epäyhtälön yleiset ratkaisuohjeet:

- Epäyhtälön kumpaakin puolta saadaan erikseen sieventää suorittamalla merkittyjä laskutoimituksia.
- Epäyhtälön kummallekin puolelle saadaan lisätä (tai vähentää) sama lauseke. Toisin sanoen: Termi (eli yhteenlaskettava) saadaan siirtää epäyhtälön puolelta toiselle, kunhan sen merkki samalla muutetaan.
- Epäyhtälön molemmat puolet saadaan kertoa tai jakaa samalla positiivisella luvulla.
- **Epäyhtälön molemmat puolet saadaan kertoa tai jakaa samalla negatiivisella luvulla, kunhan erisuuruusmerkin suunta samalla käännetään.**

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
& 2(x+1) \leq 4(x-5) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+2 \leq 4x-20 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x-4x \leq -20-2 \\
\Leftrightarrow\quad & -2x \leq -22 \qquad \mid :(-2) < 0 \text{ !!!} \\
& x \geq 11
\end{aligned}
$$

Huomaa erityisesti, että **epäyhtälöä ei saa kertoa sellaisella tuntematonta sisältävällä lausekkeella, jonka merkkiä ei tunneta**, **koska emme tällöin tiedä, pitäisikö erisuuruusmerkin suunta kääntää vai ei.**

Esimerkki. Epäyhtälöä $2 \geq \frac{3}{x}$ ei voi ratkaista x:llä kertomalla, koska emme tiedä, mikä merkki pitäisi panna kertomalla saatavien lausekkeiden väliin:

$$2x \ ? \ 3 .$$

Tässä esimerkissä mainittu epäyhtälö ratkaistaan seuraavassa pykälässä esitettävällä tavalla.

Huomautus. Kehittyneillä apuvälineillä voi tietenkin ratkaista epäyhtälöitä samoin kuin yhtälöitäkin.

Harjoitustehtäviä

9.1.1 Anna esimerkki kahdesta luvusta siten, että

v) pienemmän neliö on suurempi kuin suuremman neliö

a) pienemmän luvun käänteisluku on suurempi kuin suuremman luvun käänteisluku.

9.1.2 Anna esimerkki sellaisesta kahden luvun osamäärästä, joka

a) kasvaa, jos osoittaja kasvaa

b) pienenee, jos osoittaja kasvaa

c) pienenee, jos nimittäjä kasvaa

d) kasvaa, jos nimittäjä kasvaa.

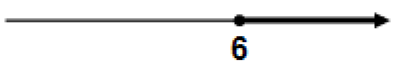
9.1.3 Havainnollista seuraavien epäyhtälöiden mukaisia lukuja lukusuoraa käyttäen

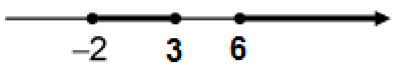
a) $x \le 3$ **b)** $x > 2$ **c)** $-1 \le x < 3$ **d)** $x < 1$ tai $x \ge 2$

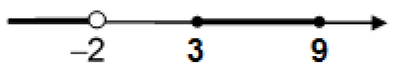
9.1.4 Esitä seuraavat lukusuoralle vahvennettuina merkityt epäyhtälöiden ratkaisujoukot epäyhtälöiden avulla:

v1)


v2)


a)


b)


c)


d)


9.1.5 Kirjoita epäyhtälön yleiset ratkaisuohjeet.

9.1.6 Ratkaise käsin ja laskimella

v1) $4(x-0.5) < 6(x+1)$ **v2)** $(x-2)^2 \ge (x+1)^2$

a) $\dfrac{x}{2} + 1 > \dfrac{4x}{5} - 3$ **b)** $4(x-3)^2 \ge (2x+1)^2$

9.1.7 Ratkaise käsin ja laskimella seuraavat yhden tuntemattoman epäyhtälöryhmät ja kaksoisepäyhtälöt. Näitä ratkaistaessa haetaan niitä lukuja, jotka samanaikaisesti toteuttavat kaikki epäyhtälöt tai kaksoisepäyhtälön molemmat osat. Kaksoisepäyhtälön voit kirjoittaa laskimeen sellaisenaan ja epäyhtälöryhmän vastaavasti kuin yhtälöryhmänkin.

v1) $-4 \le -3x + 2 \le 11$ **v2)** $x - 4 < -2x + 5 < x + 8$ **v3)** $\begin{cases} -2x \le x + 6 \\ 3x < x + 10 \end{cases}$

a) $2 < -3x \le 5$ **b)** $-8 < -3x + 7 \le 4$ **c)** $\begin{cases} -3x \le 2x + 40 \\ 2x + 5 > 5x + 6 \end{cases}$

d) $3 - 2x < x + 1 < 6 - 3x$ **e)** $x + 3 \le 2x - 5 < x - 4$

9.2 Murtoepäyhtälön ja korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Murtoepäyhtälö ja korkeamman asteen epäyhtälö kannattaa käsin laskettaessa useimmiten ratkaista seuraavin vaihein:

1. Siirrä kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle, jolloin lauseketta verrataan nollaan eli riittää tutkia vain lausekkeen merkkiä.
2. Yhdistä mahdolliset murtolausekkeet ja jaa vasen puoli tekijöihin.
3. Määritä tekijöiden merkinmuutoskohdat.
4. Kirjoita merkinmuutoskohdat suuruusjärjestykseen.
5. Tee taulukko, jossa tutkit kunkin tekijän merkkiä eri alueissa.
6. Määritä koko lausekkeen merkki eri alueissa.
7. Kirjoita vastaus.

Käytännössä mekaaniset laskut tehdään tietenkin apuvälineillä.

Esimerkki. Käydään edellisen pykälän lopussa mainittu esimerkki $2 \geq \frac{3}{x}$ läpi yllä esitettyjä vaiheita käyttäen:

Vaihe 1 $\quad 2 - \frac{3}{x} \geq 0$

Vaihe 2. $\quad \frac{2x-3}{x} \geq 0$

Vaihe 3. Tekijöiden $2x-3$ ja x merkinmuutoskohdat saadaan kyseisten lausekkeiden nollakohtina ja ne ovat 1.5 ja 0

Vaihe 4. Merkinmuutoskohdat ovat suuruusjärjestyksessä

Vaihe 5. ja Vaihe 6.

		0		1.5	
$\nearrow$ $2x-3$	−		−	0	+
$\nearrow$ x	−	0	+		+
$\frac{2x-3}{x}$	+		−	0	+

Vaihe 7. Vastaus: $\underline{\underline{x < 0 \quad \text{tai} \quad x \geq 1.5}}$

Vaiheessa 5 nousevat nuolet kuvaavat sitä, että tekijät $2x-3$ ja x esittävät nousevia suoria kulmakertoimien 2 ja 1 ollessa positiivisia.

Vaiheessa 6 salaman kuva kertoo, että murtolauseke $(2x-3)/x$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa. Sama murtolauseke saa positiivisen arvon, jos negatiivisten tekijöiden määrä on parillinen eli 0 tai 2.

Esimerkki. Ratkaistaan epäyhtälö $9x \geq x^3$ käyttäen em. vaiheita.

Vaihe 1. $9x - x^3 \geq 0$

Vaihe 2. $x(3-x)(3+x) \geq 0$

Vaihe 3. Tekijöiden merkinmuutoskohdat ovat 0, 3 ja -3.

Vaihe 4.

Vaihe 5.

Vaihe 6.

		-3		0		3	
↗ x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
↘ $3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
↗ $3+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Tulo	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

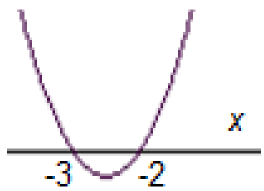
Vaihe 7. Vastaus: $\underline{\underline{x \leq -3 \text{ tai } 0 \leq x \leq 3}}$

Huomaa, että vaiheessa 5 voi kahden ensimmäisen asteen tekijän $3-x$ ja $3+x$ asemasta tarkastella yhtä toisen asteen tekijää $9-x^2$, joka esittää alaspäin aukeavaa paraabelia nollakohtina -3 ja 3.

Huomautus. Toisen asteen epäyhtälö kannattaa useimmiten ratkaista siirtämällä kaikki termit vasemmalle puolelle sekä määrittämällä vasenta puolta kuvaavan paraabelin nollakohdat ja aukeamissuunta.

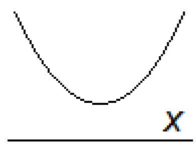
Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$, ja alaspäin, jos $a < 0$, katso tarkemmin luvusta 12 Analyyttista geometriaa. Periaatekuvasta, jonka ei tarvitse olla tarkka, voidaan sitten lukea vastaus.

Esimerkki. Ratkaistaan epäyhtälö $x^2 < -5x - 6$ muodossa $x^2 + 5x + 6 < 0$.



Koska vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat -3 ja -2, niin epäyhtälö toteutuu, kun $\underline{\underline{-3 < x < -2}}$.

Esimerkki. Ratkaise $x^2 + 2x + 3 > 0$.



Koska vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole reaalisia nollakohtia, niin paraabeli on aina *x*-akselin yläpuolella.
Niinpä epäyhtälö toteutuu $\underline{\underline{\text{kaikilla x:n arvoilla}}}$.

Harjoitustehtäviä

9.2.1 Kirjoita murtoepäyhtälön ja korkeamman asteen epäyhtälön ratkaisuvaiheet.

9.2.2 Ratkaise käsin ja laskimella epäyhtälöt

v1) $\frac{1}{x} \le 3$

v2) $\frac{x-2}{x+1} \ge \frac{x+1}{x-2}$

v3) $(x+1)(-2x+3) \ge 0$

v4) $(x-2)(2x-3)(4-3x) < 0$

a) $\frac{2}{x} \ge \frac{x}{2}$

b) $\frac{1-x}{x+2} < \frac{x+2}{1-x}$

c) $\frac{(x-\sqrt{2})(-x+3)}{(-2x-3)(x+2)} \le 0$

d) $\frac{x(x-3)}{(x+2)(-2x+5)} \le \frac{4(x-3)}{(x+2)(-2x+5)}$

e) $\frac{(x-1)(x+1)^2}{x(x-5)} \le 0$

f) $(3x-1)(-2x+2)(x+1) \ge 0$

g) $(x+1)(x+2)(x+3) < (x+2)(x+3)$

9.2.4 Ratkaise paraabelin aukeamissuuntaa ja nollakohtia käyttäen seuraavat epäyhtälöt

v1) $-x^2-3 \ge 0$ **v2)** $x^2-4x-3 > 0$ **v3)** $-x^2-2x-2 < 0$

a) $2x^2+5x-7 > 0$ **b)** $x^2-3x+2 \le 0$ **c)** $x^2+4x+5 \ge 0$

d) $x^2+2x+1 \le 0$ **e)** $-2x^2+x+1 \ge 0$ **f)** $-3x^2-x+4 < 0$

g) $-x^2-5 > 0$ **h)** $-2x^2-3x-11 < 0$

9.2.5 Määritä kaikki ne kertoimen c arvot, joilla

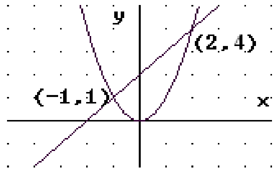
v) yhtälön $2x^2+3x+c=0$ juuret ovat imaginaariset

a) yhtälön $3x^2-6x+c=0$ juuret ovat reaaliset.

9.3 Epäyhtälön graafinen ratkaiseminen

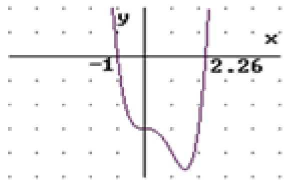
Tapa 1. Jos epäyhtälö voidaan muuttaa kahden helposti piirrettävän lausekkeen väliseksi epäyhtälöksi, niin voit ratkaista epäyhtälön piirtämällä käsin (tai apuvälineellä) molempien puolien kuvaajat ja lukemalla kuvasta vastauksen.

Esimerkki. Ratkaise $x^2 - x - 2 < 0$ muodossa $x^2 < x + 2$ piirtämällä paraabeli $y = x^2$ ja suora $y = x + 2$. Kuvan mukaan paraabeli on suoran alapuolella, kun $\underline{\underline{-1 \leq x \leq 2}}$.



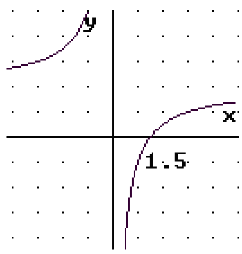
Tapa 2. Mikäli epäyhtälöä ei voi hajottaa kahdeksi helposti piirrettäväksi lausekkeeksi, niin siirrä kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle ja piirrä sen kuvaaja (helpoiten tietenkin sopivalla apuvälineellä). Kuvasta voi sitten katsoa, millä *x*:n arvoilla kuvaaja on *x*-akselin halutulla puolella.

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $x^4 > 2x^3 + 3$ siirtämällä kaikki termit vasemmalle $x^4 - 2x^3 - 3 > 0$ ja piirtämällä vaikkapa laskimella vasemman puolen kuvaaja. Kuvan mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $\underline{\underline{x < -1 \text{ tai } x > 2.26}}$.



Epäyhtälön ratkaisualueen lukeminen kuvasta on toisinaan epätarkkaa, jos kuvaaja katkeaa. Tällaisessa tapauksessa kannattaa muistaa, että kuvaajan katkeamiskohta liittyy usein funktion nimittäjän nollakohtaan.

Esimerkki. Jos epäyhtälö $2 - \dfrac{3}{x} > 0$ ratkaistaan piirtämällä, niin kuvaajan pitää saada ratkaisualueella positiivisia *y*-arvoja. Koska käyrän ”hyppy” tapahtuu nimittäjän nollakohdassa $x = 0$, niin kuvasta saadaan vastaukseksi $\underline{\underline{x < 0 \text{ tai } x > 1.5}}$.



Harjoitustehtäviä

9.3.1 Ratkaise graafisesti sekä käsin että laskimella

a) $x^3 - 5x + 2 > 0$ **b)** $7x - \dfrac{1}{x} - 6 \leq 0$

9.3.2 Ratkaise epäyhtälö $3x - 4\sqrt{x} - 4 > 0$ graafisesti termejä siirrettyäsi.

9.4 Epäyhtälöiden sovelluksia

Epäyhtälöiden muodostaminen ja niissä käytettävät merkinnät on selvitettävä samoin kuin jo yhtälöiden ja yhtälöryhmienkin yhteydessä on tehty. Käytännössä epäyhtälöt kannattaa tietenkin ratkaista apuvälineitä hyödyntäen.

Esimerkki. Mikä on juoksijan alkuperäinen nopeus, jos nopeuden lisääminen määrällä 0.20 m/s parantaa hänen aikaansa 5000 metrin juoksussa enemmän kuin 30 sekuntia.

Ratkaisu. $\boxed{\text{Merkitään } v = \text{juoksijan alkuperäinen nopeus}}$.

Ratkaisussa käytetään yksiköitä m ja s, joita ei merkitä näkyviin.

Epäyhtälö perustuu esimerkin tietoon

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ajan parannus} > 30\\ \text{eli}\\ \text{Alkuperäinen pitkä aika} - \text{uusi lyhyt aika} > 30\end{array}} \quad \Bigg|\ \text{Aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Matka}}{\text{alkuperäinen nopeus}} - \frac{\text{matka}}{\text{uusi nopeus}} > 30$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5000}{v} - \frac{5000}{v+0.2} > 30$$

$$\overset{\text{laskimella}}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{-5.87 < v < -.2}_{\text{Nämä arvot eivät kelpaa}} \quad \text{or} \quad 0 < v < 5.67$$

Vastaus: Juoksijan alkuperäinen nopeus on alle 5.7 m/s

Harjoitustehtäviä

9.4.1 Mikä on auton alkuperäinen nopeus, jos nopeuden vähentämien määrällä 10.0 km/h lisää aikaa 500 km matkalla yli 30.0 minuuttia?

9.4.2 Määritä ne luvut, jotka toteuttavat ehdon: luvun ja sen käänteisluvun erotus (tässä järjestyksessä) on **v)** suurempi kuin 2 **a)** enintään 3.

9.4.3 Määritä kaikki ne luvut, joiden käänteisluku on
v1) lukujen -3 ja 5 välillä **v2)** pienempi kuin 5
a) lukujen -5 ja 3 välillä **b)** pienempi kuin 8

9.4.4 Mikä on pumpun alkuperäinen tilavuusvirta, jos
v) tilavuusvirran kasvattaminen määrällä $4.00\ \text{m}^3/\text{h}$ lyhentää 1000 kuutiometrin suuruisen altaan täyttöaikaa alle 30.0 tuntia?
a) tilavuusvirran pienentäminen määrällä $2.00\ \text{m}^3/\text{h}$ kasvattaa 600 kuutiometrin suuruisen altaan täyttöaikaa yli 30.0 tuntia?

VASTAUKSIA TEHTÄVIEN v-OSIOIHIN

Varsinaisia likiarvotehtäviä lukuun ottamatta joidenkin tehtävien vastaukset on annettu ylitarkasti verrattuna likiarvolaskujen yhteydessä käsiteltyihin nyrkkisääntöihin. Tähän on useampiakin syitä. Ylitarkasta vastauksesta opiskelija voi luotettavammin tarkistaa oman vastauksensa oikeellisuuden, jos hän on suorittanut laskut välivaiheineen riittävällä tarkkuudella. Toisaalta useimmat tehtävät ovat teoreettisia pohjautumatta likimääräisiin mittaustuloksiin. Kannattaa myös huomata, että rahamäärät sekä korko- ja alennusprosentit yms. ovat aina tarkkoja ellei toisin sanota, joten niihin liittyvät vastaukset on annettava senttien tai viisien senttien tarkkuudella.

1.2.1 **v1)** 12.35 **v2)** 1.23 **v3)** 78.90 **v4)** 0.00

1.2.2 **v1)** $21.0\cdot 10^4$ tai $2.10\cdot 10^5$ tai $0.210\cdot 10^6$ **v2)** 0.0123 **v3)** 23.5
v4) 89.0 m **v5)** -3.46 **v6)** 21.0 kg

1.3.2 $x=123\pm 2$, $y=0.330\pm 0.004$, $z=89000\pm 300$, $u=5.7\pm 0.9$

1.3.3 $z=$ ylitarkasti $0.228106\pm 0.0050307=0.228\pm 0.006$

1.3.4 $P=$ ylitarkasti $(541\pm 35)W=(540\pm 40)W$

1.3.5 $I=$ ylitarkasti $(4.1417\pm 0.5583)A=(4.1\pm 0.6)A$

1.3.6 ylitarkasti $(442.95\pm 42.698)\text{kg}=(440\pm 50)\text{kg}$

1.4.2 $A=16.9$ (summasääntö), $16.805\le A\le 16.915$, katkaisu sopivasti
$B=563$ (tulosääntö) , $561.859\le B\le 563.549$, katkaisu sopivasti
$C=39.61$ (yleissääntö), $38.76\le C\le 40.45$, katkaisu väärin

1.4.3 (i) Yleissäännöllä $A\approx 39.653$ (ii) Vaiheittain tutkien $A\approx 39.7$
Koska $A_{min}=39.5379$, $A_{max}=39.7688$, niin vaiheittain tutkimalla saatiin sopiva katkaisukohta.

2.1.1 **v1)** $1+2/(3+4)\approx 1.2857$ **v2)** $\big((1+2)/(3+4)\big)\cdot\big((8-1)/(4-1)\big)=1$
v3) $\sqrt{}(9+16)+\sqrt{}(25+144)=18$ **v4)** $1+2*3\,\hat{}\,(5-4)=7$

2.2.1

$$\underbrace{\overbrace{\underline{12}\cdot\underline{x}}^{\text{1. termi}}}_{\text{1. termin kaksi tekijää}}\;+\underbrace{\overbrace{\underline{3}\cdot\underline{(a+2b-3c)}\cdot\underline{\sin(20^\circ)}}^{\text{2. termi}}}_{\text{2. termin kolme alleviivattua tekijää}}\;\overbrace{+}^{+\text{ tarpeeton}}\;\underbrace{\overbrace{\underline{-7}\cdot\underline{a}\cdot\underline{(x+2y^2)}}^{\text{3. termi}}}_{\text{3. termin kolme tekijää}}$$

2.2.2 **v1)**

$$\overset{\text{1. tek.}}{25}\cdot\overset{\text{2. tek.}}{a}\cdot\overset{\text{3. tek.}}{b}\cdot\underbrace{\overbrace{(\underline{3x}+\underline{4y^2}\underline{-5uv})}^{\text{4. tekijä}}}_{\text{4. tekijän kolme alleviivattua termiä}}\cdot\underbrace{\overbrace{(\underline{\sqrt{x}}+\underline{y})}^{\text{5. tekijä}}}_{\text{5. tekijän 2 allev. termiä}}$$

v2)

$$\overset{\text{1. tek.}}{a}\cdot\overset{\text{2. tek.}}{b}\cdot\underbrace{\overbrace{(\underline{a}+\underline{b^2})}^{\text{3. tekijä}}}_{\text{3. tekijän 2 allev. termiä}}\cdot\overset{\text{4. tek.}}{\frac{1}{c}}$$

2.3.2 **v1)** $\frac{1}{8}$ **v2)** $\frac{1}{3}$ **v3)** $\frac{4b^2}{15c}$ **v4)** $\frac{8b-15a}{20ab}$ **v5)** $x-y$ **v6)** $ax+b$

2.3.3 **v1)** $4a^2+4ab+b^2$ **v2)** $9s^2-t^2$
v3) $25x^2+30xy+9y^2$ **v4)** $2u^2-3uv-2v^2$

2.3.4 **v1)** $(2x+y)(2x-y)$ **v2)** $y\cdot(x-3y)^2$

2.3.5 **v1)** $\frac{x-3y}{x+3y}$ **v2)** $\frac{a+2b}{a-2b}$ **v3)** $-\frac{3u-2v}{3u+2v}$ **v4)** $\frac{3x-2y}{6}$ **v5)** $\frac{2(2a-3b)}{3(2a+3b)}$

2.4.1 **v1)** $8x^2-2x+12$ **v2)** $4x^5+16x^3-8x^2+15x-20$

2.4.2 $(3x^5+4x^4)+(-3x^5+2x^2)=4x^4+2x^2$

2.4.3 Jos polynomin $P(x)$ astetta merkitään $\deg(P)$, niin

v1) $\deg(P+Q)=5$, $\deg(P-Q)=5$, $\deg(P\cdot Q)=9$, $\deg(P^3)=15$

v2) $\deg(P+Q)\le 3$, $\deg(P-Q)\le 3$, $\deg(P\cdot Q)=6$, $\deg(P^3)=9$

2.4.4 **v1)** Osamäärän aste $=2$, mahdollisen jakojäännöksen aste < 3.
v2) Osamäärän aste $=0$, mahdollisen jakojäännöksen aste < 7.
v3) Osamäärä on nollapolynomi, jonka astetta ei ole määritelty.
Jakojäännös = jaettavana ollut polynomi, jonka aste $=3$.

2.4.5 Jako väärin suoritettu, sillä $(3x+1)\cdot 4x+(-6)\neq 12x^2+7x-5$.

2.4.6 $6x^3+2x^2-7x-4$

2.4.7 **v1)** osamäärä 3, jakojäännös 17
v2) osamäärä $3x-7$, jakojäännös 22
v3) osamäärä $5x^2-10x+8$, jakojäännös $14x-23$
v4) osamäärä x^2-2x+1, jakojäännös x^2+5x-4

2.4.8 $A=1/2$, $B=-1/2$ **2.5.1** $2(x+1)^2-3$

2.5.2 **v1)** Pienin arvo $7/8$ saadaan, kun $x=-1/4$
v2) Suurin arvo 21 saadaan, kun $x=1$, $y=-2$

2.5.3 3750 m^2 **2.5.4** 5000 m^2 **2.5.5** 25200 cm^2 **2.5.7** 3 , –0.5

3.1.1 **v1)** $5+5i$ **v2)** $-1+i$ **v3)** $13i$ **v4)** $\frac{12+5i}{13}$ **v5)** $-5+12i$ **v6)** $-i$

3.1.4 **v1)** 1 **v2)** $10+10i$ **v3)** $-2+i$ **v4)** -1

4.1.2 $9.8\cdot 10^{9876}$, $9.8\cdot 10^{9876}$, $7.4\cdot 10^{11111}$, $1.3\cdot 10^{8642}$

4.2.1 (i) $x^3, a^3b^2/\sqrt[6]{a^6+b^{18}}, 2a^2b^3\sqrt[3]{c^6+d^{12}}$ (ii) $x^3, -a^3b^2/\sqrt[6]{a^6+b^{18}}, 2a^2b^3\sqrt[3]{c^6+d^{12}}$

4.2.2 $(8\sqrt{2}+17)/7$ **4.3.1** $1/4, 1000, 1/\sqrt[3]{a^6+b^9}$

5.1	2228.3%	**5.2**	95.705%	**5.3**	55.54%	**5.4**	792.86%
5.5	17.65%	**5.6**	13.04%	**5.7**	12.5%	**5.8**	7.177%
5.10	35.06%	**5.11**	Kasvoi 4.85%	**6.1**	0.267		

6.2 **v1)** Voima säilyy ennallaan **v2)** Voima tulee 36-kertaiseksi.

6.3 **v1)** *y* on verrannollinen *x*:n kuutioon
v2) *y* on kääntäen verrannollinen *x*:n neliöjuureen

6.4 $w=\frac{5}{24}\cdot\frac{x^2\sqrt{z}}{y}$

7.1.1 **v1)** $x=2/3$ **v2)** Yhtälö mahdoton, ei ratk.
v3) Yhtälö toteutuu kaikilla *x*:n arvoilla **v4)** $x=-4$

7.1.2 **v1)** Ei ratk., yhtälö mahdoton **v2)** Yhtälö toteutuu kaikilla *x*:n arvoilla

7.2.3 **v1)** $x = 1$ tai $-3/4$ **v2)** Ei ratk. **v3)** $x_1 = x_2 = -3/2$

7.2.4 **v1)** Ei reaal. juuria **v2)** 1 reaal. juuri **v3)** 2 erisuurta reaalij.

7.2.5 $a = 9/16$ **7.2.6** $p = 13/3$, $x_2 = -4/3$

7.2.7 Toinen juuri on $3-2i$. Yhtälö on $x^2 - 6x + 13 = 0$

7.2.9 **v1)** $x = 5/2$ **v2)** Ei ratkaisuja

7.3.1 **v1)** $x = 1$ tai $1/2$ **v2)** $x = \pm\dfrac{9}{7}i$ **v3)** $x = 0$ tai $\dfrac{226}{107}$

7.3.2 **v1)** $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ tai ± 1 **v2)** $x = 2$ tai 0 **v3)** $x = \pm 2i$ tai $\pm 1/2$

7.3.3 **v1)** $x = 3$ tai -7 **v2)** $x = -2, -3/2$ tai $-4/3$

v3) $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 7$ **v4)** $x_{1,2,3} = 0$, $x_{4,5} = \pm 2\sqrt{2}$

v5) $x = 1/3$ tai $2/7$ **v6)** $x = 3/2$ tai $3/5$

7.3.4 **v1)** $x = \pm 2$ tai 5 **v2)** $x = 3$ tai -2

7.3.5 **v1)** $\pm 1, \pm 1/2$ **v2)** $0, -67/56, -89/78$ **v3)** $-4/5, -21/32$

7.4.1 345,60 € **7.4.2** 1.27 m **7.4.3** 95 km/h **7.4.4** 83.4 mm tai 15.8 mm

7.4.5 437 g $\approx$ 440 g **7.4.6** 19.0 kg **7.4.7** 24 v

7.4.8 700 km/h **7.4.9** 2119 mm

7.4.10 Jos $p = \pm\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$, niin $x = \mp\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ tai $\mp\sqrt{14}$ | vieressä ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat

7.4.11 Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bc + c = 0$ juurten summa $= -b/a$ ja tulo $= c/a$

$$1 \cdot x_2 = -\frac{8888}{1234} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{4444}{617}$$

7.4.12 135 m tai 1385 m **7.4.13** 5185 m $\approx$ 5200 m **7.4.14** 7250 m

7.5.1 **v1)** $P(x) = (2x-1)(x-2)(x+3)$

v2) Neljäs nollakohta on $-i$.

$R(x) = (x-1)(x-2)(x-i)(x+i) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$

7.5.2 $P(x) = (x+2)(x-3)(2x-1)^2$

7.5.3 **v1)** $P(x) = (x-1)(3x-2)$ **v2)** $Q(x) = x^2(2x-1)(3x+1)$

v3) $R(x) = (x-1)(x+1)(x-2i)(x+2i) = (x-1)(x+1)(x^2+4)$

7.5.4 **v1)** $\dfrac{6x+1}{3x+5}$ **v2)** $\dfrac{5x^3+2x^2}{3x+4}$

8.1.1 $x = 14/23$, $y = -29/23$ **8.1.2** $x = 1, y = 1, z = 0$

8.1.3 **v1)** Ryhmä mahdoton **v2)** $\begin{cases} z = \text{mielivaltainen} \\ x = 2z - 1 \\ y = -3z + 4 \end{cases}$ **8.1.4** $\begin{cases} x = \text{mielivaltainen} \\ y = (8-13x)/2 \\ z = (x-2)/2 \end{cases}$

8.1.5 **v1)** Ei ratkaisuja **v2)** $x = 1, y = 2$

8.1.6 **v1)** $\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y = x \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \pi \\ y = \pi \end{cases}$

v2) $\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y \text{ mielivaltainen} \\ z = x + y + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0.5 \\ y = \pi \\ z = \pi + 1.5 \end{cases}$

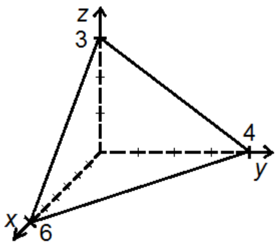
v3) $\begin{cases} x \text{ mielivalt. kokonaisluku} \\ y = \pi \cdot x \\ z = 3 \cdot x \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pi \\ z = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5\pi \\ z = 15 \end{cases}$

v4) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ **v5)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$ (ainoa yhteinen) **v6)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2\pi \\ z = 6 \end{cases}$ (ainoa yhteinen)

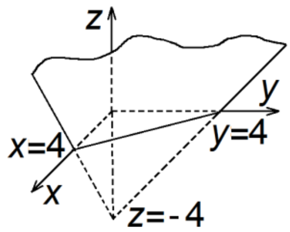
8.1.7 Ensimmäinen ja kolmas ratkaisujoukko

8.2.3 **v1)** (i) $a \neq 4$ (ii) $a = 4$, $b = 6$ (iii) $a = 4$, $b \neq 6$
v2) (i) $c = 8$ (ii) Ei sopivaa vakiota (iii) $c \neq 8$

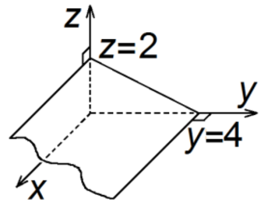
8.2.5 **v1)**



v2)



v3)



8.3.1 $\begin{cases} y = \cos x \\ y = 0.006x^2 \end{cases}$

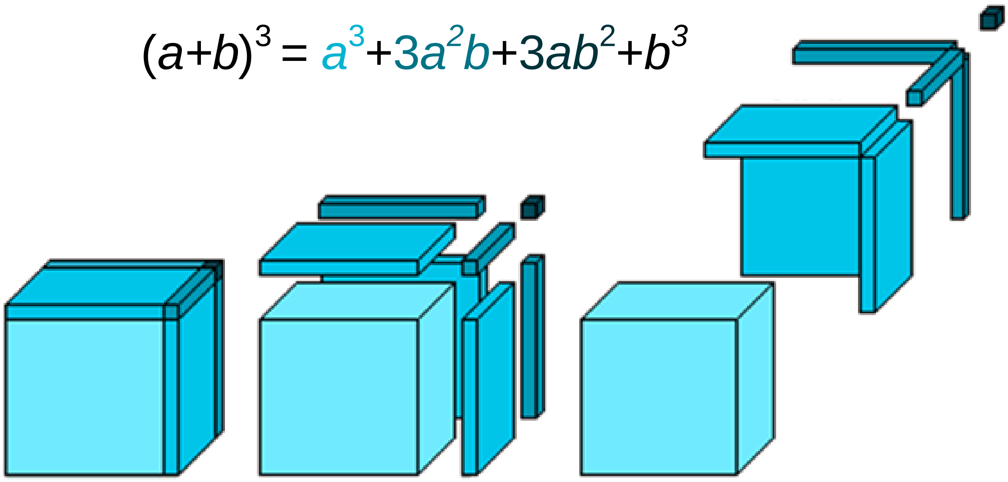
8.4.1 Poika 8 v, isä 32 v
8.4.2 Juostava 3.33 km, käveltävä 0.67 km
8.4.3 105 mm ja 11.7 mm
8.4.4 16.4 mm, 6.10 mm ja 17.5 mm
8.4.5 Laimeampaa liuosta 19.0 kg ja väkevämpää 24.2 kg
8.4.6 **v1)** 7.5 kg liuosta 1, 15 kg liuosta 2 ja 2.5 kg liuosta 3
v2) Mahdotonta **v3)** 30 kg liuosta 1, 30 kg liuosta 2 ja 15 kg vettä
v4) 1.67 kg liuosta 1, 2.92 kg liuosta 2 ja vettä haihdutettava 2.08 kg
8.4.7 600 s
8.4.9 117 s
8.4.10 Taksi vie 4 henkeä 13.68 km:n päähän, palaa 7.37 km hakemaan kävelemään jääneet ja vie heidät perille. (Aikaa kuluu matkaan 1.74 h)
8.4.12 **v1)** $i_{AB} = 0{,}852$ A, $i_{AC} = -1.444$ A, $i_{AD} = 0.593$ A
v2) $i_{AB} = 1.909$ A, $i_{AC} = -1.079$ A, $i_{AD} = -0.830$ A
9.1.1 $-2 < 1$ ja $(-2)^2 > 1^2$
9.1.4 **v1)** $-2 \le x \le 6$ **v2)** $x < -2$ tai $x \ge 6$
9.1.6 **v1)** $x > -4$ **v2)** $x \le 1/2$
9.1.7 **v1)** $-3 \le x \le 2$ **v2)** $-1 < x < 3$ **v3)** $-2 \le x < 5$
9.2.2 **v1)** $x < 0$ tai $x \ge 1/3$ **v2)** $1/2 \le x < 2$ tai $x < -1$
v3) $-1 \le x \le 3/2$ **v4)** $4/3 < x < 3/2$ tai $x > 2$
9.2.4 **v1)** Ei ratkaisuja **v2)** $x < 2 - \sqrt{7}$ tai $x > 2 + \sqrt{7}$
v3) Epäyhtälö toteutuu kaikilla *x*:n arvoilla
9.2.5 $c > 9/8$
9.4.2 $1 - \sqrt{2} < x < 0$ tai $x > 1 + \sqrt{2}$
9.4.3 **v1)** $x < -1/3$ tai $x > 1/5$ **v2)** $x < 0$ tai $x > 1/5$
9.4.4 Alkuperäinen tilavuusvirta > 9.72 m^3/h

Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta

ALGEBRA

Osa 2

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$



samk

10. HYÖDYLLISIÄ MERKINTÖJÄ

Tärkeimmillä lukujoukoilla on omat tunnuksensa:

$\mathbb{N} =$ **luonnollisista luvuista** 1,2,3,… muodostuva joukko. Joskus nollaakin pidetään luonnollisena lukuna.

$\mathbb{Z} =$ **kokonaisluvuista** $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ muodostuva joukko.

$\mathbb{Q} =$ **rationaaliluvuista** muodostuva joukko, joka käsittää kaikki kokonaisluvut ja murtoluvut (eli kokonaislukujen osamäärät).
Desimaaliluku on rationaaliluku vain, jos sen voi esittää murtolukuna. Tämä on mahdollista, jos luvun desimaaliesitys on joko
1) päättyvä tai
2) päättymätön ja jaksollinen.

$\mathbb{R} =$ **reaalilukujen** joukko. Reaaliluvut ovat ne luvut, jotka voidaan esittää lukusuoralla. Rationaalilukujen lisäksi reaalilukuihin kuuluvat irrationaaliluvut ts. sellaiset luvut, joiden desimaaliesitykset ovat päättymättömiä ja jaksottomia. Tällaisia lukuja ovat esimerkiksi $\sqrt{2}$ ja π.

$\mathbb{C} =$ **kompleksilukujen** joukko, joka käsittää kaikki muotoa *a*+*bi* olevat luvut, missä *a* ja *b* ovat mielivaltaisia reaalilukuja ja *i* on imaginaariyksikkö.

Huomautus. Reaaliluvutkin ovat kompleksilukuja, joiden imaginaariosa $b = 0$. Usein nimityksellä kompleksiluku tarkoitetaan kuitenkin virheellisesti pelkästään sellaista kompleksilukua, joka ei ole reaaliluku. Tällöin pitäisi kuitenkin puhua **imaginaariluvusta.**

Symbolia $\in$ käytetään ilmaisemaan luvun kuulumista joukkoon. Vastakohtaa ilmaisee symboli $\notin$.

Esimerkki. $5 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $\frac{-2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{-2}{3} \in \mathbb{Q}$,

$\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$, $2-3i \notin \mathbb{R}$, $2-3i \in \mathbb{C}$.

Kaksi ensimmäistä merkintää voidaan lukea "5 kuuluu luonnollisiin lukuihin" tai "5 on luonnollinen luku" ja "-2 ei kuulu luonnollisiin lukuihin" tai "-2 ei ole luonnollinen luku".

Esimerkki. Trigonometrisen yhtälön $\sin\alpha = 1$ ratkaisu voidaan esittää muodossa $\alpha = 90° + n \cdot 360°$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki. Esitetään kokonaislukujen osamääränä

a) päättyvä desimaaliluku 12.34

b) päättymätön jaksollinen desimaaliluku $x = 111.11345\,345\,345...$

a) $^{100)}12.34 = \frac{12.34 \cdot 100}{100} = \underline{\underline{\frac{1234}{100}}}$. Halutessaan vastausta voi supistaa.

b) Koska tarkasteltavan luvun jakson 345 pituus on kolme numeroa, niin kerromme tarkasteltavan luvun ensin luvulla 10^3 eli 1000, jolloin jaksot uudelleen "osuvat päällekkäin" siten, että seuraavassa vähennyslaskussa kaikki loppupään jaksot kumoutuvat:

$$\begin{array}{rl} 1000x = 111113.45\,345\,345... & \\ x = 111.11345\,345... & \Big| \text{ Vähennetään} \\ \hline 999x = 111002.34 & \end{array}$$

$$x = {}^{100)}\frac{111002.34}{999} = \underline{\underline{\frac{11100234}{99900}}}$$

Tätäkin vastausta voisi vielä supistaa, mutta jo nytkin luku x on esitetty kokonaislukujen osamääränä.

Määritelmä. **Suljettu väli** $[a,b]$ sisältää kaikki ehdon $a \le x \le b$ toteuttavat reaaliluvut x.

Avoin väli $]a,b[$ sisältää kaikki ehdon $a < x < b$ toteuttavat reaaliluvut x.

Puoliavoimet välit $[a,b[$ ja $]a,b]$ sisältävät vastaavasti kaikki ehdon $a \le x < b$ tai ehdon $a < x \le b$ toteuttavat reaaliluvut.

Esimerkki. $2 \in [2,5]$, $2 \notin]2,5]$

Ekvivalenssinuolta $\Leftrightarrow$ on jo aiemmin käytetty yhtälöä ratkaistaessa ilmoittamaan, että perättäisillä yhtälöillä on samat ratkaisut.

Ekvivalenssinuoli voidaan yleisemminkin merkitä minkä tahansa kahden väitteen väliin ilmaisemaan, että väitteet ovat ekvivalentit eli yhtäpitävät, ts. ne toteutuvat samanaikaisesti: joko molemmat ehdot ovat voimassa tai kumpikaan ehdoista ei toteudu. Ekvivalenssinuoli voidaan lukea sanoina "silloin ja vain silloin kun" tai "jos ja vain jos".

Esimerkki. $x \in [2,5[\quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x < 5$

$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$

Kahden ehdon väliin merkitty implikaationuoli $\Rightarrow$ ilmaisee, että vasemmanpuoleisen ehdon toteutuessa myös oikeanpuoleinen ehto toteutuu (mutta ei välttämättä kääntäen). **Merkintä ei kuitenkaan kerro mitään siitä, toteutuuko vasemmanpuoleisen ehto vai ei.**

Esimerkki. Kirjoitelmassa $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ oleva implikaationuoli luetaan kahdessa vaiheessa seuraavasti

"**Jos** *x* on 2, **niin** *x* toiseen on neljä".

Kirjoitelma on tosi, koska vasemmanpuoleisen ehdon toteutuessa myös oikeanpuoleinen ehto toteutuu. Kirjoitelma ei kuitenkaan kerro sitä, onko *x* kaksi vai ei.

Kolmoispistettä $\therefore$ käytetään johtopäätöksen ilmaisemiseen, kun joistakin tosiasioista päätellään uusia tosiasioita.

Implikaationuolesta poiketen kolmoispistettä saa käyttää vain, jos sen edellä ollut kirjoitelma on tosi. Kolmoispisteen voi lukea seuraavanlaisina sanoina ”niinpä”, ”näin ollen”, ”siis”, … tai selvimmin kahdessa vaiheessa sanoina

”**Koska** …, **niin** …”

Implikaationuolen ja kolmoispisteen ero selviää seuraavasta esimerkistä, jossa on kaksi paikkansapitävää kirjoitelmaa.

Esimerkki. Voitan lotossa päävoiton $\Rightarrow$ Rahahuoleni häviävät vähäksi aikaa. Matematiikkaa tarvitaan kaikkialla. $\therefore$ Matematiikkaa kannattaa opiskella.

Määritelmä. Olkoon *n* positiivinen kokonaisluku. Luvun *n* **kertoma** $n!$ määritellään tulona

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

Lisäksi nollan kertoma määritellään ykköseksi

$$0! = 1$$

Esimerkki. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Laske sama lauseke laskimellasi kokeillen kertoman merkkinä huutomerkkiä.

Esimerkki. Sievennetään $\frac{1001!}{1000!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot ... \cdot \cancel{1000} \cdot 1001}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot ... \cdot \cancel{1000}} = 1001$.

Laskimesi ei ehkä pysty sieventämään tätä lauseketta, koska ilman supistamista sekä osoittaja että nimittäjä ovat laskimen laskettavaksi liian suuria.

Huomautus. Sekä nollan kertoma että luvun nollas potenssi on ns. **tyhjä tulo**, jossa ei ole yhtään tekijää. Tyhjä tulo on määriteltävä ykköseksi, sillä olemassa olevan tulon arvo ei voi muuttua, jos se kerrotaan tyhjällä tulolla, sillä eihän silloin todella mitään tapahdukaan:

$$\text{olemassa oleva tulo} \times \underbrace{\text{tyhjä tulo}}_{\text{oltava yksi}} = \text{olemassa oleva tulo}\,.$$

Vastaavasti **tyhjä summa** tarkoittaa summaa, jossa ei ole lainkaan yhteenlaskettavia. Tyhjän summan arvo on puolestaan luonnollisesti nolla:

$$\text{olemassa oleva summa} + \underbrace{\text{tyhjä summa}}_{\text{oltava nolla}} = \text{olemassa oleva summa}\,.$$

Määritelmä. Olkoot n ja k ei-negatiivisia kokonaislukuja, $n \geq k$.
Binomikerroin n **yli** k**:n** määritellään lausekkeeksi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\;.$$

Muistisääntö: n yli k:n on ylemmän luvun kertoma jaettuna alemman luvun kertomalla ja lukujen erotuksen kertomalla.

Esimerkki. $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \dfrac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1} = 4$, $\binom{3}{3} = \dfrac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \underbrace{(3-3)!}_{=0!=1}} = 1$

Huomautus. Binomikerroin $\binom{n}{k}$ ilmoittaa montako k-alkioista osajoukkoa (eli kombinaatiota) voidaan valita joukosta, jossa on n eri alkiota.

Esimerkiksi 4-alkioisesta joukosta $\{a,b,c,d\}$ saadaan $\binom{4}{3} = 4$ erilaista 3-alkioista osajoukkoa: $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ ja $\{b,c,d\}$ sekä $\binom{4}{2} = 6$ erilaista 2-alkioista osajoukkoa: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$ ja $\{c,d\}$.

Joissakin laskimissa binomikerroin $\binom{4}{3}$ saadaankin syötteellä nCr(4,3), missä kirjain C viittaa sanaan combination. Tunnuksen kirjaimet n ja r liittyvät siihen, että englanninkielisissä teksteissä tarkastellaan yleensä binomikerrointa $\binom{n}{r}$, kun taas kirjaimet n ja k ovat vakiintuneet suomalaisissa teksteissä binomikertoimen parametreiksi.

Huomautus. Nimi binomikerroin johtuu siitä, että määritelmän mukaiset luvut $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, esiintyvät seuraavan lauseen mukaisesti termien kertoimina, kun binomin $x + y$ potenssi $(x+y)^n$ kerrotaan auki.

Binomilause. Olkoon n ei-negatiivinen kokonaisluku. Silloin

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Esimerkki. $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Huomautus. Laskimissa on tavallisesti oma komentonsa expand kertolaskun ja potenssiin korotuksen suorittamiseksi, koska tekijämuoto on monasti käyttökelpoisempi eikä laskin voi etukäteen tietää pitäisikö tulolauseke laskea auki vai ei.

Esimerkki. Määritä muotoa $x^{18}y^3$ olevan termin kerroin, kun $(2x^2 - 3y^3)^{10}$ kerrotaan auki.

$$(2x^2 - 3y^3)^{10} = \left(2x^2 + (-3y^3)\right)^{10} = \binom{10}{0}(2x^2)^{10}(-3y^3)^0 + \underbrace{\binom{10}{1}(2x^2)^9(-3y^3)^1}_{\text{Tämän termin kerrointa kysytään}} + \ldots$$

Kysytty kerroin on $\binom{10}{1} \cdot 2^9 \cdot (-3)^1 = \dfrac{\overset{10}{\cancel{10!}}}{1! \cdot \cancel{(10-1)!}} \cdot 2^9 \cdot (-3) = -15360$.

Kerroin löytyy myös pitkän vastauksen sisältä suorittamalla koko potenssiinkorotus laskimella.

Huomautus. Binomin pieneen potenssiin liittyvät kertoimet saa näppärästi ns. **Pascalin kolmiosta**, jossa ylimmällä vaakarivillä on yksi ykkönen ja alempien vaakarivien luvut saadaan aina laskettua vinosti yläpuolella olevien lukujen summana viereisen mallin mukaisesti:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . .

Esimerkki. Kun potenssi $(2x-y^2)^4$ kerrotaan auki, binomikertoimet saadaan siltä Pascalin kolmion riviltä, jossa ykkösen perässä on eksponenttina oleva luku 4. Näin ollen

$$\begin{aligned}(2x-y^2)^4 &= 1\cdot(2x)^4(-y^2)^0+4\cdot(2x)^3(-y^2)^1+6\cdot(2x)^2(-y^2)^2\\ &\qquad +4\cdot(2x)^1(-y^2)^3+1\cdot(2x)^0(-y^2)^4\\ &= \underline{\underline{16x^4-32x^3y^2+24x^2y^4-8xy^6+y^8}}\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

10.1 Miten seuraavat väitteet tulisi lukea ääneen? Totea jokaisesta väitteestä erikseen, pitääkö se paikkansa.

v1)	$2\in[2,5]$	v2)	$x^2>4\Rightarrow x>2$	v3)	$x<y\Leftrightarrow -x>-y$
a)	$-3\in\mathbb{Z}$	b)	$7/4\in\mathbb{R}$	c)	$4-2i\notin\mathbb{C}$
d)	$5\in]0,5[$	e)	$x=3\Rightarrow x^2=9$	f)	$x^2=4\Rightarrow x=2$
g)	$x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$	h)	$x>y\Rightarrow x^2>y^2$	i)	$x<-2\Rightarrow x^2\geq 4$
j)	$x<y\Leftrightarrow 2x<2y$	k)	$x<y\Rightarrow \dfrac{x}{y}<1$	l)	$x>y\Rightarrow \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$
m)	$x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2>0$	n)	$x\leq 3\Rightarrow x^2\leq 9$		

10.2 Luettele nimetyt lukujoukot "pienimmästä" "suurimpaan". Anna sellainen esimerkki kunkin lukujoukon luvusta, joka ei kuulu edelliseen lukujoukkoon.

10.3 Esitä murtolukuna
v1) 1,23 **v2)** 12,0343434… **a)** 0,032 **b)** 0,12345634563456…

10.4 Laske käsin ja laskimella $\binom{4}{1}, \binom{5}{3}, \binom{6}{1}, \binom{7}{0}, \binom{10}{10}, \binom{n}{0}, \binom{n}{2}, \binom{n}{n}$, kun $n\geq 2$.

10.5 Esitä $(x+y)^3, (x+y)^6, (2x+3y)^4$ ja $(x-2y)^5$ auki kerrottuina käyttäen apuna Pascalin kolmiota. Tarkista tuloksesi laskimella.

10.6 Määritä laskinta (i) nelilaskimena käyttäen (ii) tehokkaasti hyödyntäen muotoa $x^{96}y^8$ olevan termin kerroin, kun lauseke
v1) $(2x^2-3y^4)^{50}$ **a)** $(3x^4-2y^2)^{28}$ kerrotaan auki.

11. FUNKTIOISTA

11.1 Funktion käsite

Määritelmä. Suure y on toisen suureen x **funktio**, jos suureen y arvo määräytyy yksikäsitteisesti suureen x arvosta.

Tällaisen riippuvuuden olemassaolo ilmaistaan merkinnällä $y = y(x)$ tai $y = f(x)$ (luetaan esimerkiksi "yy on yy äx" tai "yy on äf äxästä").

Suuretta x sanotaan **argumentiksi** tai myös **vapaaksi eli riippumattomaksi muuttujaksi (independent variable)**. Funktiota y voidaan sanoa myös **riippuvaksi muuttujaksi (dependent variable)**.

Esimerkki. Koska neliön ala A määräytyy yksikäsitteisesti neliön sivun s arvon perusteella, niin neliön ala on sivun s funktio ts. $A = A(s)$. Koska tunnemme tätä riippuvuutta esittävän matemaattisen yhtälön, niin voimme kirjoittaa tarkemminkin $A = A(s) = s^2$.

Vastaavasti kuution tilavuus V on sivun s funktio, $V = V(s) = s^3$.

Edellä sana funktio tarkoitti **suuretta**, jonka arvo riippui yksikäsitteisesti toisesta suureesta.

Sana funktio voi tarkoittaa myös sitä **sääntöä**, joka liittää argumentin x arvoon suureen y yksikäsitteisen arvon. Hyvin usein tämä sääntö annetaan yhtälönä, jossa riippuva suure y on esitetty vapaan muuttujan x avulla. Voimme siis puhua esimerkiksi funktiosta $y = x^2$ ja trigonometrisistä sini- ja kosinifunktioista pelkkinä matemaattisina sääntöinä ilman että tarkastelemme mitään fysikaalisia suureita, joiden arvo riippuu yksikäsitteisesti toisesta suureesta.

Jos y on muuttujan x funktio $y = y(x)$, niin muuttujan x tiettyyn arvoon x_0 liittyvää funktion y arvoa merkitään $y(x_0)$, mikä luetaan "yy arvolla äx nolla".

Esimerkki. Olkoon $y = y(x) = x^3$. Silloin
$y(1) = 1^3 = 1$, $y(4) = 4^3 = 64$, $y(a) = a^3$, $y(a+1) = (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

Esimerkki. Jos $u = u(t) = 1/t$, niin $u(0)$ ei ole määritelty.

Huomaa, että esimerkiksi merkinnästä $y(x+3)$ et voi suoralta kädeltä sanoa tarkoittaako se tuloa "y kertaa $(x+3)$" vai jonkin funktion y arvoa argumentin arvolla $x+3$. Merkinnän tarkoitus on selvitettävä kulloisestakin asiayhteydestä.

Mikäli tekstissä ei puhuta mitään funktiosta y, vaan sanotaan esimerkiksi vain, että "sievennä lauseke $y(x+3)-y(x-3)$", niin kyseessä on muuttujia x ja y sekä yhteen-, vähennys- ja kertolaskua sisältävä lauseke, joka sievenee muotoon $yx+3y-yx+3y=6y$.

Jos taas tekstissä puhutaan funktiosta y, niin lauseketta $y(x+3)$ ei saa laskea tulon osittelulakia matkien muodossa $y(x+3)=y(x)+y(3)$, vaan ensin on yksityiskohtaisesti selvitettävä, miten funktion arvo määräytyy kohdassa $x+3$.

Esimerkki. Jos s-sivuisen neliön alaa merkitään $A(s)$, niin silloin merkintä $A(s+t)$ tarkoittaa $(s+t)$-sivuisen neliön alaa, joka on

$$A(s+t)=(s+t)^2=s^2+2st+t^2=s^2+t^2+2st=A(s)+A(t)+2st.$$

Merkinnässä $A(s+t)$ ei siis ole kyse mistään kertolaskusta ”A kertaa $(s+t)$” eikä lauseketta saa muokata kertolaskun osittelulakia käyttäen muotoon $A(s)+A(t)$, joka olisi edellisestä poiketen s^2+t^2.

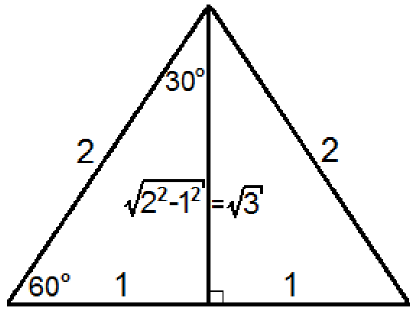
Esimerkki. Koska s-sivuisen kuution tilavuus $V=V(s)=s^3$, niin $2s$-sivuisen kuution tilavuus on $V(2s)=(2s)^3=8s^3=8\cdot V(s)$.

Merkinnässä $V(2s)$ ei siis ole kyse mistään kertolaskusta ”V kertaa $(2s)$” ja siksi lausekkeessa $V(2s)$ ”tekijöiden” paikkaa ei saa vaihtaa kertolaskun vaihdantalakia mukaillen järjestykseen $2V(s)$.

Matematiikassa esiintyy monia varsin erikoisestikin määriteltyjä funktioita, joilla on vakiintuneet useampikirjaimiset tunnukset kuten sin, cos, ln, lg, arcsin, …

On huomattava, että nämä funktiot eivät noudata ”kertolaskun kaavoja”, vaan ne noudattavat omia lakejaan, joita tarkastelemme myöhemmin kunkin funktion yhteydessä.

Esimerkki. Osoitamme kirjoitelman $\sin(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin\alpha$ vääräksi arvolla $\alpha=30°$ käyttäen apuna tasasivuisesta kolmiosta (sivun pituus 2 yksikköä) korkeusjanalla puolittamalla saatua suorakulmaista kolmiota.



$$\sin(2\cdot\alpha)=\sin(60°)=\frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cdot\sin\alpha=2\cdot\sin(30°)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Kirjoitelman yhtäsuuruus ei toteudu, kun $\alpha=30°$.

Trigonometriassa voidaan osoittaa, että kaikilla kulman α arvoilla on voimassa kaava $\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Tämän kaavan yleistä paikkansapitävyyttä ei voi tietenkään todistaa tutkimalla kirjoitelmaa vain joissakin erikoistapauksissa. Mutta jos kaavamme toteutuu satunnaisesti valitulla kulman arvolla, niin on mahdollista, että kaava todellakin on oikea. Jos valitsemme esimerkiksi $\alpha = 23.4°$, niin laskimella saadaan kaavan eri puolille laskentatarkkuuden puitteissa (likimain) yhtä suuret arvot

$$\begin{aligned} \mathrm{VP} &= \sin 46.8° \approx 0.7289686274214 \\ \mathrm{OP} &= 2\cdot\sin(23.4°)\cdot\cos(23.4°) \\ &\approx 2\cdot 0.39714789063478\cdot 0.91775462568398 \approx 0.72896862742143 \end{aligned}.$$

Tämä esimerkki puoltaa väitettämme, että em. kaava voisi todellakin olla oikea.

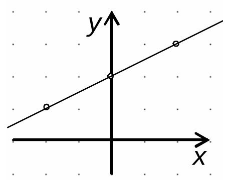
Huomautus. Väitteen voi osoittaa vääräksi yhdelläkin vastaesimerkillä, mutta väitteen oikeaksi todistamiseen ei riitä yksi esimerkki, vaan väite pitää todistaa oikeaksi kaikilla mahdollisilla arvoilla.

Funktiota $y = y(x)$ voi havainnollistaa piirtämällä sen kuvaajan. Tällöin suorakulmaiseen *xy*-koordinaatistoon merkitään yhtälöstä $y = y(x)$ määräytyviä pisteitä $(x, y(x))$, jotka tavallisesti määrittävät koordinaatistoon jonkin viivan.

Koska funktion arvo on aina yksikäsitteinen, niin funktion kuvaajalle on ominaista, että jokaiseen argumentin *x* arvoon liittyy enintään yksi funktion *y* arvo eli jokainen koordinaatistoon piirretty pystysuora suora leikkaa funktion kuvaajaa enintään yhdessä pisteessä.

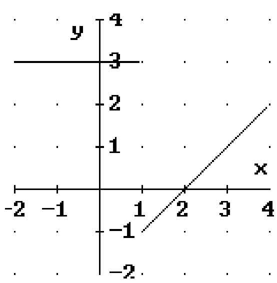
Esimerkki. Piirretään funktion $y = 0.5x + 2$ kuvaaja laskemalla ensin joitakin kuvaajan pisteitä. Pisteet merkitään koordinaatistoon ja lopuksi niiden kautta piirretään sopiva viiva.

x	*y*
–2	1
0	2
2	3



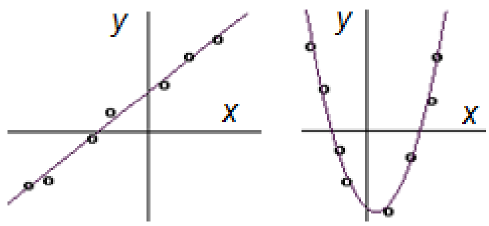
Tässä esimerkissä funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin $k = 0.5$ saadaan yhtälöstä *x*:n kertoimena. Suora leikkaa *y*-akselia vakiotermin 2 määrittämällä korkeudella.

Esimerkki. Viereen on piirretty **paloittain määritellyn funktion** $y = \begin{cases} 3, & \text{jos } x < 1 \\ x-2, & \text{muulloin} \end{cases}$ kuvaaja käyttäen piirtämisasetusta, jossa vain lasketut pisteet merkitään näkyviin. Jos lasketut pisteet tulostimen asetusten mukaan yhdistetään toisiinsa suoralla viivalla, niin kuvaan tulee kohtaan $x = 1$ ylimääräinen pystysuora viiva.



Jos funktio tunnetaan vain muutamien likimääräisten mittauspisteiden avulla, niin mittauspisteet merkitään koordinaatistoon ja käsin piirrettäessä kuvaaja piirretään kauniina, harkitun yksinkertaisena viivana, joka sopii mahdollisimman hyvin pistejoukkoon. Viivan ei välttämättä tarvitse kulkea yhdenkään likimääräisesti tunnetun pisteen kautta. Jos kuitenkin esimerkiksi teoreettisin perustein tiedämme kuvaajan kulkevan vaikkapa origon kautta, niin tämä tietenkin otetaan viivaa piirrettäessä huomioon.

Esimerkki. Viereisissä kuvissa on piirretty likimääräisiin mittauspisteistöihin liittyvät, sopivan yksinkertaisilta vaikuttavat viivat.



Ensimmäisessä tapauksessa sopiva viiva voi hyvinkin olla suora, jonka yhtälössä $y = ax + b$ olevien kertoimien a ja b likiarvot saadaan määritettyä silmämääräisesti sovitetun suoran ominaisuuksien avulla. Tämän **regressiosuoran** kertoimet voidaan tarkemmin laskea esimerkiksi laskimen regressiotoimintoja käyttäen.

Toisessa tapauksessa sopiva kuvaaja voi olla paraabeli $y = ax^2 + bx + c$, jonka kertoimet saadaan myös laskimen sopivalla regressiotoiminnolla.

Apuvälineitä käyttäessään laskija joutuu tavallisesti itse päättämään sen funktiotyypin, jota pisteistöön sovitetaan. Apuväline laskee sitten valitulle funktiotyypille ”parhaat mahdolliset” kertoimet.

Kertoimien laskemisessa käytetään tavallisesti **pienimmän neliösumman menetelmää**, jolloin kertoimet valitaan siten, että mittauspisteiden ja kuvaajan välisten pystysuuntaisten poikkeamien neliöiden summa on pienin mahdollinen. Sovitettava käyrä voi olla korkeampaakin kuin ensimmäistä tai toista astetta oleva polynomi. Monissa kasvu- ja kuolemisprosesseissa käytetään eksponenttifunktiota, josta tulee puhe luvussa 14.

Huomautus. Esimerkiksi pisteisiin (0,7), (1,5) ja (2,4) parhaiten sopiva suora $y = -1.5x + 6.8333$ saadaan TI-Nspire CX CAS -laskimen komennolla

LinRegMx {0,1,2},{7,5,4}

Pisteisiin $(-2,4)$, $(0,0)$ ja (2,5) parhaiten liittyvä paraabeli $y = 1.125x^2 + 0.25x$ saadaan vastaavasti laskimen komennolla

QuadReg {$-$2,0,2},{4,0,5}

Viimeksi lasketun regressiotoiminnon tulokset nähdään komennolla

stat.results

ja viimeksi määritelty regressiofunktio on tallennettu laskimeen nimellä

stat.RegEqn()

11.2 Itseisarvo ja muita perusfunktioita

Tarkastelemme seuraavassa muutamia matematiikassa usein käytettäviä perusfunktioita tärkeimpine ominaisuuksineen.

Määritelmä. Reaaliluvun x **itseisarvo** on $|x| = \begin{cases} x\,, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$.

Itseisarvofunktion tunnuksena käytetään laskimissa yleisesti lyhennettä abs johtuen sanasta absolute value.

Esimerkki. $|4| = 4$, $|-5| = -(-5) = 5$, $\left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$, sillä $\sqrt{2}-1 \geq 0$

$\left|2-\sqrt{7}\right| = -(2-\sqrt{7}) = -2+\sqrt{7}$, sillä $2-\sqrt{7} < 0$.

$\left|x^2\right| = x^2$, sillä jokaisen reaaliluvun x neliö on ei-negatiivinen.

$|-x| = |x|$. Lauseketta ei voi sieventää pidemmälle ellei x:n merkkiä tiedetä.

Jos x on negatiivinen, niin $|x| = -x$.

Huomautus. Lauseke $|x-a|$ esittää lukusuoran lukujen x ja a välimatkaa.

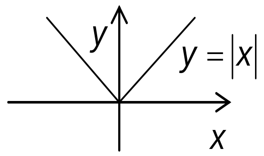
Esimerkki. $|x-3| < 1 \Leftrightarrow$ lukujen x ja 3 välinen etäisyys < 1

$\Leftrightarrow 2 < x < 4$

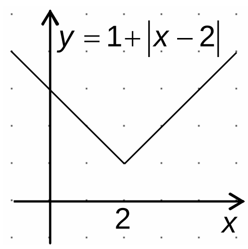
$|x-3| \geq 1 \Leftrightarrow$ lukujen x ja 3 välinen etäisyys ≥ 1

$\Leftrightarrow x \leq 2$ tai $x \geq 4$

Itseisarvofunktion kuvaaja yhtyy viereisen kuvan mukaisesti negatiivisilla x:n arvoilla suoraan $y = -x$ ja positiivisilla x:n arvoilla suoraan $y = x$.



Esimerkki. Piirrä funktion $y = 1 + |x-2|$ kuvaaja.



Tapa 1. Tutkitaan funktion lauseketta eri alueissa:

Jos $x < 2$, niin $y = 1 + (-(x-2)) = -x+3$.

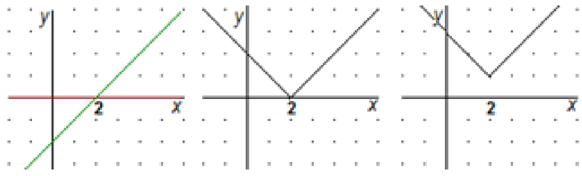
Jos $x \geq 2$, niin $y = 1 + (x-2)) = x-1$.

Kumpaankin alueeseen on sitten piirretty sievennetyn funktion kuvaaja.

Tapa 2. Kuvaajan voi piirtää myös vaiheittain:

1) Piirretään nouseva suora $y = x - 2$.

2) Itseisarvofunktion $y = |x-2|$ kuvaaja saadaan edellisestä peilaamalla x-akselin alapuolella olevat pisteet x-akselin yläpuolelle.



y=x-2 $\quad$ y=|x-2| $\quad$ y=|x-2|+1

3) Summafunktion $y = |x-2|+1$ kuvaaja saadaan siirtämällä edellisen kohdan tuloksena saatua V-viivaa yhden yksikön verran ylöspäin.

Määritelmä. **Merkkifunktio** määritellään ehdosta

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1\,, & \text{jos } x \text{ positiivinen} \\ \;\;0\,, & \text{jos } x = 0 \\ -1\,, & \text{jos } x \text{ negatiivinen} \end{cases}.$$

Huomautus. Merkkifunktio arvolla 0 jätetään usein määrittelemättä tai sille käytetään merkintää ± 1.

Esimerkki. Jokaiselle reaaliluvulle x on voimassa $x = \text{sign}(x)\cdot|x|$.

Määritelmä. **Lattia- ja kattofunktiot** määritellään ehdoista

floor(x) = suurin kokonaisluku, joka on enintään x:n suuruinen ,

ceiling(x) = pienin kokonaisluku, joka on vähintään x:n suuruinen.

Huomautus. Lattia- ja kattofunktioista saa käsityksen ajattelemalla pystysuoraa lukusuoraa kerrostalona, jossa kokonaislukuvälit edustavat kerroksia, joissa kussakin asuu aina tietyn kokonaislukuvälin reaaliluvut.

Esimerkki.

$$\text{floor}(3.1) = 3 \qquad \text{floor}(3) = 3 \qquad \text{floor}(-3.1) = -4$$
$$\text{ceiling}(3.1) = 4 \qquad \text{ceiling}(3) = 3 \qquad \text{ceiling}(-3.1) = -3$$

Esimerkki. Osoitetaan väite $\text{floor}(x+y) = \text{floor}(x) + \text{floor}(y)$ *vääräksi* yhden vastaesimerkin avulla.

Jos valitaan esimerkiksi $x = 2.6$ ja $y = 3.8$, niin yhtälön puolet ovat erisuuret:

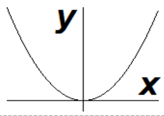
$$\text{Vasen puoli} = \text{floor}(2.6+3.8) = \text{floor}(6.4) = 6$$
$$\text{Oikea puoli} = \text{floor}(2.6) + \text{floor}(3.8) = 2 + 3 = 5$$

114

11.3 Funktioiden ominaisuuksia

Määritelmä. Funktiota sanotaan **kasvavaksi** (**väheneväksi**), jos sen kuvaaja on nouseva (laskeva).

Esimerkki. Funktio $y = x^2$ on kasvava, kun $x \geq 0$,
ja vähenevä, kun $x \leq 0$.

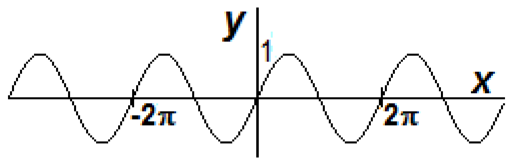


Määritelmä. Funktio $y = y(x)$ on **jaksollinen**, **jaksona** T, jos $T \neq 0$ ja $y(x+T) = y(x)$ kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla funktio on määritelty.
Pienintä positiivista jaksoa T sanotaan **perusjaksoksi**.

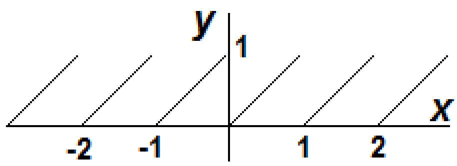
Huomautus. Jaksollisen funktion kuvaaja ei muutu mitenkään, vaikka sitä siirretään oikealle tai vasemmalle jakson verran.

Funktion perusjakso on lyhin positiivinen siirto, jossa funktion kuvaaja osuu täydellisesti alkuperäisen kuvaajan päälle. Myös kaikki perusjakson kokonaiset monikerrat ovat tietenkin funktion jaksoja.

Esimerkki. Funktio $y = \sin x$ on jaksollinen, jaksona esimerkiksi
$\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ...
Perusjaksona on 2π.

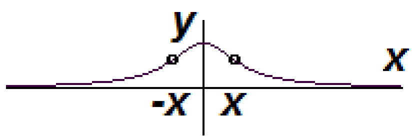


Esimerkki. Funktio $y = x - floor(x)$ on jaksollinen perusjaksona $T = 1$.



Funktioiden parillisuus ja parittomuus

Määritelmä. Funktio $y = y(x)$ on **parillinen**, jos $y(-x) = y(x)$ kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla funktio on määritelty.

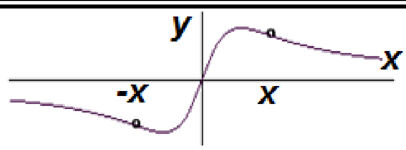


Koska parillinen funktio saa yhtä suuret arvot kohdissa $-x$ ja x, niin **parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen *y*-akselin suhteen**.

Esimerkki. Funktiot $f(x) = 3x^4$, $g(x) = 7x^4 - 5x^2 + 1$ ja $h(x) = \cos x$ ovat parillisia, sillä esimerkiksi

$$g(-x) = 7(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 7x^4 - 5x^2 + 1 = g(x) \quad \text{kaikilla } x\text{:n arvoilla.}$$

Määritelmä. Funktio $y = y(x)$ on **pariton**, jos $y(-x) = -y(x)$ kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla funktio on määritelty.



Koska pariton funktio saa itseisarvoltaan yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset arvot kohdissa $-x$ ja x, niin **parittoman funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen**.

Esimerkki. Funktiot $f(x) = 4x^3$, $g(x) = 6x^3 - 5x$ ja $h(x) = \sin x$ ovat parittomia, sillä esimerkiksi

$$g(-x) = 6(-x)^3 - 5(-x) = -6x^3 + 5x = -(6x^3 - 5x) = -g(x)$$

kaikilla x:n arvoilla.

Useimmat funktiot eivät ole parillisia eivätkä parittomia, sillä funktioiden kuvaajat eivät yleensä ole symmetrisiä.

Esimerkki. Funktio $y(x) = 4x^2 + 3x$ ei ole parillinen eikä pariton. Tämän kielteisen tuloksen voi todistaa oikeaksi tarkastelemalla yhtä sopivaa arvoparia. Koska luvut $y(1) = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 7$ ja $y(-1) = 4(-1)^2 + 3(-1) = 4 - 3 = 1$ eivät ole samoja eivätkä vastalukuja, niin funktio $y(x)$ ei voi olla parillinen eikä pariton.

Lause. Kahden parillisen funktion tulo on parillinen.
Kahden parittoman funktion tulo on parillinen.
Parillisen ja parittoman funktion tulo on pariton.

Todistetaan edellisen lauseen viimeinen väite. Olkoon

$f(x)$ parillinen ts $f(-x) = f(x)$ ja $g(x)$ pariton ts $g(-x) = -g(x)$.

Tarkastellaan tuloa $T(x) = f(x) \cdot g(x)$. Koska

$$T(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -\left(f(x) \cdot g(x)\right) = -T(x)$$

kaikilla x:n arvoilla, niin $T(x)$ on pariton funktio.

Funktioiden parillisuus/parittomuus on eri asia kuin kokonaislukujen parillisuus/parittomuus. Niinpä monet parillisia ja parittomia funktioita koskevat tulokset saattavat ensi kuulemalta vaikuttaa vääriltä.

Nimensä parilliset ja parittomat funktiot ovat saaneet siitä, että jos ne ovat polynomeja tai jos ne voidaan esittää ”astetta ääretön olevien polynomien” (eli ns. potenssisarjojen) avulla, niin näissä ”polynomeissa” on vain muuttujan parillisia/parittomia potensseja.

Esimerkki. Pariton funktio $\sin x$ voidaan esittää muuttujan x parittomia potensseja sisältävänä potenssisarjana: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$

Vastaavasti parillinen funktio $\cos x$ voidaan esittää muuttujan x parillisia potensseja sisältävänä potenssisarjana: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$

Koska eksponenttifunktion potenssisarjassa $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ esiintyy sekä x:n parillisia että parittomia potensseja, niin eksponenttifunktio ei ole pariton eikä parillinen.

Huomautus. Funktiota voi approksimoida potenssisarjansa alkupään avulla. Trigonometrista funktiota arvioitaessa kulma on esitettävä radiaaneina:

Esimerkki. $\sin(0.2^r) = 0.2 - \frac{0.2^3}{3!} + \frac{0.2^5}{5!} - \ldots = 0.2 - 0.001333\ldots + 0.000002666\ldots - + \ldots$

Termien määrä	1	2	3	4
Alkupään summa	0.2	0.198666...	0.198669333...	**0.1986693307**936...

Vertaa: $\sin(0.2^r) =$ **0.1986693307**9507

Harjoitustehtäviä

11.1 Määrittele laskimeesi funktio $y(x) = x^2 - x$ vaikkapa komennolla Define $y(x)=x^2-x$. Laske sekä käsin että laskimella lausekkeet $y(0.1)$, $y(a)$, $y(a+b)$ ja $y(a)+y(b)$. Määritä funktion $y(x)$ nollakohdat. Suorita lopuksi laskimellasi potenssiin korotukset $(a+b)^5$ ja $(x+y)^6$. Oliko jommassakummassa potenssiin korotuksessa ongelmia? Miksi?

11.2 Sievennä sekä käsin että laskimella lauseke $k(a+b) - k(a+1) - k(b+1)$.

11.3 Laske sekä käsin että laskimella $f(3)$, $f(\frac{1}{3})$, $\frac{1}{f(3)}$ ja $f(f(3))$, kun

v) $f(x) = x^2 + 1$ **a)** $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

11.4 Esitä ilman itseisarvomerkkejä eri alueissa
v1) $|x+3|$ **v2)** $|x-1| - |2x+1|$ **a)** $5 - |x+1|$ **b)** $|x-2| + |2x+6|$

11.5 Piirrä käsin ja laskimella seuraavien funktioiden kuvaajat
a) $y = |x+1|$ **b)** $y = |x|+1$ **c)** $y = |x+1| + |x-4|$

11.6 Ratkaise käsin ja laskimella **a)** $|x-3|<2$ **b)** $|x+2|>3$ **c)** $2<|x-7|\le 5$

11.7 Määritä laskimella pistejoukkoon **v)** (-3,5) , (-1,1) , (0,0) , (3,-6)
a) (0,7), (1,5), (3,2) ja (5,-3) mahdollisimman hyvin sopiva suora.

11.8 Etsi jotkin sellaiset luvut x ja y, joilla kirjoitelma
$$\text{ceiling}(x+y) = \text{ceiling}(x) + \text{ceiling}(y)$$
pitää paikkansa. Asian varmistamiseksi laske kirjoitelman vasemman ja oikean puolen arvot kyseisillä muuttujien arvoilla. Etsi sitten uudet luvut x ja y, joilla kirjoitelma ei ole voimassa. Tarkista asia laskemalla.

11.9 Piirrä funktion $y = \text{floor}(x)$ kuvaaja laskimella. Muista, että jokainen pystysuora suora leikkaa funktion kuvaajaa enintään yhdessä pisteessä. Ei kai kuvaajassasi ole mitään vikaa. Mistä se saattaisi johtua?

11.10 Esitä parillisen ja parittoman funktion määritelmät sekä kuvaajien symmetrisyyttä koskevat lauseet.

11.11 Osoita määritelmään perustuen, että funktio
a) $f(x) = 3x^4+5$ on parillinen **b)** $g(x) = 4x^3-2x$ on pariton
c) $h(x) = 2x^3+3x^2$ ei ole parillinen eikä pariton.

11.12 Tutki sekä laskimella piirretyn kuvaajan avulla että määritelmään perustuvalla omalla tarkastelullasi, mitkä seuraavista funktioista ovat parillisia, parittomia tai ei kumpaakaan
v) $f(x) = |x|+1$ **a)** $g(x) = \text{floor}(x^2)$ **b)** $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

11.13 Todista, että kahden parittoman funktion tulo on parillinen.

11.14 Tutki kahden parittoman funktion summan parillisuutta/parittomuutta.

11.15 Keksitkö funktion, joka on sekä parillinen että pariton? Piirrä funktion kuvaaja asian varmistamiseksi.

11.16 Olkoon $f(x)$ pariton funktio. Määritä $f(0)$, jos se on määritelty.

11.17 Milloin polynomi esittää parillista funktiota? Entä paritonta funktiota? Milloin polynomi ei ole parillinen eikä pariton?

11.18 Olkoon funktio $f(x)$ jaksollinen, jaksona T. Mitä voit sanoa seuraavien funktioiden jaksollisuudesta?
v) $g(x) = 4f(3x)$ **a)** $h(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **b)** $i(x) = f(5x)-6$

11.19 Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja, kun $f(x) = x$ välillä $0 \le x < 2$ ja lisäksi
a) $f(x)$ on jaksollinen jaksona 2
b) $f(x)$ on pariton ja jaksollinen jaksona 4
c) $f(x)$ on parillinen ja jaksollinen jaksona 4.

12. ANALYYTTISTA GEOMETRIAA

12.1 Peruskäsitteitä

Analyyttisessa tasogeometriassa tutkimme viivojen ominaisuuksia ensin suorakulmaisessa *xy*-koordinaatistossa, jonka molemmilla akseleilla yksikköjanat ovat yhtä pitkät. Apuna käytetään pisteiden koordinaatteja ja viivojen yhtälöitä.

Jos akseleiden yksikköjanat olisivat erimittaiset, niin samojen yhtälöiden esittämien viivojen muodot ja viivojen väliset kulmat muuttuisivat.

Myöhemmin tutkimme samoja asioita myös **napakoordinaatistossa**, jossa joidenkin viivojen käsittely on helpompaa kuin suorakulmaisessa koordinaatistossa.

Viivan yhtälö tarkoittaa sellaista yhtälöä, jonka ko. viivalla olevien pisteiden koordinaatit toteuttavat, mutta muiden pisteiden koordinaatit eivät toteuta.

Viivan yhtälöä saa muokata kuten mitä tahansa muutakin yhtälöä viivan muuttumatta.

Esimerkki. Piste (2,3) on viivalla, jonka yhtälö on $x^2+y^2=13$, sillä pisteen koordinaatit toteuttavat ko. yhtälön. Sen sijaan piste (3,4) ei ole tällä viivalla.

Yhtälön kuvaaja muodostuu niistä pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat kyseisen yhtälön. Yhtälön kuvaaja on tavallisesti jokin viiva, joka voidaan piirtää eri tavoin:

1. Määrittämällä yhtälön avulla viivan pisteitä, jotka merkitään koordinaatistoon ja joiden kautta viiva piirretään käsin.
2. Tietokoneella tai laskimella. (Huomaa, että joillakin apuvälineillä voi piirtää vain ratkaistussa muodossa $y=f(x)$ olevan yhtälön kuvaajan, ei ratkaisemattomassa muodossa $F(x,y)=0$ olevan yhtälön kuvaajaa).
3. Tunnistamalla yhtälö tietyn viivan yhtälöksi.

Tässä luvussa on tarkoituksena oppia tuntemaan tärkeimmät viivat ja niiden yhtälöt siten, että heti yhtälön nähtyämme saamme mielikuvan viivasta ja sen tärkeimmistä ominaisuuksista ilman, että joudumme laskemaan viivan pisteitä tai käyttämään apuvälineitä.

Esimerkki. Viivan $y = 2x - 1$ voi piirtää eri tavoin.

1. Viivan saa piirrettyä käsin laskemalla ensin joitakin viivan pisteitä, jotka sijoitetaan koordinaatistoon. Muutaman lasketun pisteen jälkeen on selvää, että kaikki lasketut pisteet ovat samalla nousevalla suoralla.
2. Sama viiva voidaan tietenkin piirtää eri apuvälineillä.

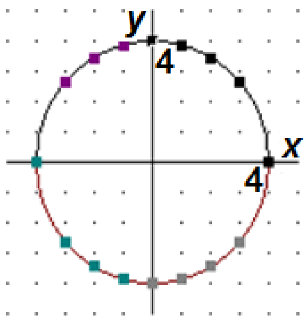
> Tämän *ratkaistussa muodossa* olevan funktion kuvaajan voi piirtää laskimen TI-Nspire CX CAS piirtotilan valinnoilla
> $\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{3}$: Kuvaajan syöttö/Muokkaus $\boxed{1}$: Funktio
> ja kirjoittamalla piirrettävän funktion määrittelevän lausekkeen.

3. Analyyttistä geometriaa tunteva lukija näkee jo viivan yhtälöstä $y = 2x - 1$ monta asiaa: Koska yhtälö on ensimmäistä astetta, niin se esittää jotakin suoraa. Muuttujan x edessä oleva kulmakerroin 2 kertoo, että suora nousee yksikön matkalla kaksi yksikköä. Vakiotermistä -1 selviää, että suora leikkaa y-akselia kohdassa $y = -1$. Tämän kaiken tottunut laskija näkee yhtälöstä yhdellä silmäyksellä ja niinpä hän voi suoran tutkimisen asemasta heti keskittyä siihen oleelliseen ongelmaan, jonka yhteydessä suora esiintyy.

Esimerkki. Tutkitaan viivaa $x^2 + y^2 = 16$.

1. Viiva voidaan piirtää pisteittäin ja se vaikuttaa ympyrältä:

x	$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$
0	± 4
± 1	± 3.9
± 2	± 3.5
± 3	± 2.6
± 4	0
± 5	ei määritelty
± 6	ei määritelty



2. Kaikilla laskimilla ympyrää ei voi piirtää ratkaisemattomassa muodossa $x^2 + y^2 = 16$, vaan ehkä y joudutaan ratkaisemaan muuttujan x lausekkeena, jolloin saadaan kaksi eri ratkaisua $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Nämä on piirrettäessä määriteltävä laskimeen kahtena eri funktiona. Näistä toinen esittää ylempää puoliympyrää ja toinen alempaa.

> Tämän *ratkaisemattomassa muodossa* olevan *ympyrän* yhtälön kuvaajan voi kuitenkin piirtää laskimen TI-Nsipre CX CAS Kuvaajat-tilan valinnoilla
> $\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{3}$: Kuvaajan syöttö/Muokkaus $\boxed{2}$: Yhtälö $\boxed{3}$: Ympyrä $\boxed{2}$: Perusmuoto
> täydentämällä laskimen tulostamaan yhtälöön sopivat kertoimet.

3. Analyyttistä geometriaa tunteva lukija näkee heti tarkasteltavan yhtälön esittävän origokeskistä ympyrää, jonka säde on $\sqrt{16} = 4$.

Huomautus. Koska kahden viivan yhteiset pisteet (leikkauspisteet tai sivuamispisteet) ovat kummallakin viivalla, niin kyseiset pisteet toteuttavat molempien viivojen yhtälöt. Näin ollen **kahden viivan yhteiset pisteet saadaan ratkaistua molempien viivojen yhtälöistä muodostuvan yhtälöparin avulla.**

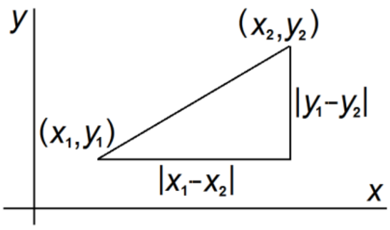
Kääntäen: Yhtälöpari voidaan ratkaista graafisesti piirtämällä kummankin yhtälön kuvaaja ja lukemalla kuvasta viivojen yhteisten pisteiden koordinaatit.

Esimerkki. Paitsi piirtämällä suorien $y=2x+1$ ja $y=-x+4$ yhteinen piste löydetään myös ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+4 \end{cases}$.

Sijoittamalla edellinen y jälkimmäiseen yhtälöön saadaan $2x+1=-x+4 \Leftrightarrow x=1$, jolloin $y=3$. Leikkauspiste on siis (1,3).

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys saadaan Pythagoraan lauseen avulla kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



Esimerkki. Pisteiden $(2,-3)$ ja (5,1) välinen etäisyys on

$$d=\sqrt{(2-5)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

Esimerkki. Määritetään se suoran $y=x+2$ piste, joka on etäisyydellä 5 pisteestä (2, 3).

Koska etsitty piste on suoralla $y=x+2$, niin piste on muotoa $(x, x+2)$. Koska tämän pisteen etäisyys pisteestä (2, 3) on 5, niin

(*) $$d=\sqrt{(x-2)^2+(x+2-3)^2}=5 \quad \Big| \text{ korotetaan neliöön}$$

$$x^2-4x+4+x^2-2x+1=25$$

$$2x^2-6x-20=0 \quad \Big| :2, \text{ käytä ratkaisukaavaa}$$

$$x=\begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}, \text{ jolloin } y=x+2=\begin{cases} 7 \\ 0 \end{cases}$$

Vastaus: Suoralla on kaksi sopivaa pistettä (5, 7) ja $(-2, 0)$

Käytännössä x kannattaa ratkaista laskimella suoraan yhtälöstä (*) tai yhtälöparista $\begin{cases} y=x+2 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=5 \end{cases}$.

Harjoitustehtäviä

12.1.1 Tutki, onko piste (1, 2) viivalla

v1) $y = x^2 + 1$ **v2)** $x^2 + y^3 = 4xy$

a) $13x - 7y - 1 = 2$ **b)** $x^2 + y^3 - xy - 7 = 0$

12.1.2 Määritä se suoran $y = x + 8$ piste, joka on

v) 5 yksikön etäisyydellä pisteestä $(-1, 6)$

a) 13 yksikön etäisyydellä pisteestä (1, 2).

12.1.3 Määritä ne

v) *y*-akselin pisteet, jotka ovat 13 yksikön etäisyydellä pisteestä (5, 7)

a) *x*-akselin pisteet, jotka ovat 5 yksikön etäisyydellä pisteestä (6, 4).

12.1.4 Kuinka pitkän janan paraabeli $y = x^2$ erottaa suorasta

v) $y = -x + 2$ **a)** $y = -2x + 3$

12.1.5 Määritä se käyrän $y = x^2$ piste, jonka etäisyys pisteestä $(1, -9)$ on

v) 2 kertaa niin suuri kuin ko. pisteen etäisyys pisteestä (2,5).

a) 3 kertaa niin suuri kuin ko. pisteen etäisyys pisteestä (2,5).

12.1.6 Piirrä yhtälön **a)** $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

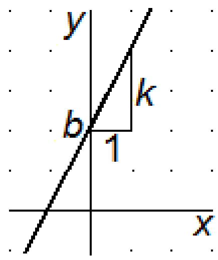
kuvaaja laskimella kahdella eri tavalla

- ratkaisemalla yhtälöstä ensin *y* muuttujan *x* avulla
- suoraan annetusta yhtälöstä mikäli mahdollista. (Joissakin laskimissa piirtäminen onnistunee antamalla vain piirrettävän viivan yhtälö. TI-Nspire CX CAS -laskinta käytettäessä on yhtälön kuvaaja kuitenkin osattava luokitella ennen piirtämistä. Myöhemmin me tulemme näkemään, että tehtävässä annetut yhtälöt esittävät ns. kartioleikkauksia, jolloin niiden kuvaajat voidaan piirtää TI-Nspire CX CAS -laskimella yhtälömuodosta valitsemalla yhtälön tyypiksi kartioleikkauksen tai tarkemmin a-kohdassa ellipsin ja b-kohdassa hyperbelin.)

12.1.7 Ratkaise graafisesti yhtälöpari **v)** $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

12.2 Suora

Huomautus. Suoran yhtälössä $\boxed{y = kx + b}$



- vakiotermi b määrää sen kohdan, missä suora leikkaa y-akselia
- kulmakerroin k määrää suoran suunnan**:**
  Edettäessä yksi yksikkö oikealle suora nousee k yksikköä.
  Jos k>0, niin suora on nouseva, jos k<0, niin suora on laskeva.

Lause. Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos ne nousevat yksikön matkalla yhtä paljon eli jos niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret, ts.

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2}\,.$$

Huomautus. Tämä yhdensuuntaisuusehto on voimassa, vaikka akseleiden yksikköjanat olisivat erimittaiset. Akselit voivat esittää jopa erilaisiakin suureita kuten usein on laita fysiikassa, jossa esimerkiksi kappaleen asemaa $x = x(t)$ havainnollistetaan tx-koordinaatistoa käyttäen. Tällöin suoran kulmakerroin ei ole enää pelkkä luku, vaan siihen liittyy yksikkö, esimerkiksi m/s.

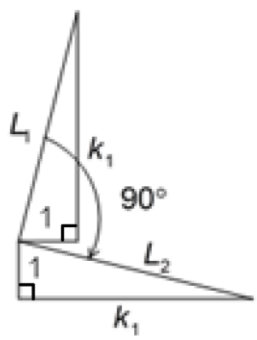
Lause. Kaksi suoraa on kohtisuorassa toisiaan vastaan silloin ja vain silloin, kun niiden kulmakertoimien tulo $= -1$, ts.

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = -1}\,.$$

Huomautus. Tämä kohtisuoruusehto on voimassa vain, jos akseleiden yksikköjanat ovat yhtä pitkät (eivätkä suorat ole koordinaattiakseleiden suuntaisia).

Jälkimmäinen lause voidaan
- helposti perustella geometrian kurssilla pistetulon avulla
- havainnollistaa viereisellä kuvalla seuraavasti:

Kohtisuorista suorista toinen on nouseva ja toinen laskeva. Olkoon nousevan suoran kulmakerroin k_1, joten se nousee yksikön matkalla k_1 yksikköä. Kohtisuoruudesta johtuen toinen suora laskee yksikön k_1 yksikön matkalla, joten sen kulmakerroin on $k_2 = -1/k_1$. Kulmakertoimien tulo on siis -1.



Lause. Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja sen kulmakerroin on k, niin suoran yhtälö on

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Todistus. Piste (x_0, y_0) toteuttaa yhtälön ja suoran kulmakerroin on todella k.

Lause. Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1)}.$$

Todistus. Koska yhtälö on muotoa $y - y_1 = k(x - x_1)$, niin se esittää jotakin pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevaa suoraa. Suora kulkee myös pisteen (x_2, y_2) kautta, koska kyseisen pisteen koordinaatit toteuttavat esitetyn yhtälön.

Huomautus. Kahden pisteen kautta kulkevan suoran yhtälön voi laskea myös laskimen regressiotoimintoa käyttäen.

Huomautus. Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on edellisen lauseen mukaan $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y\text{-muutos}}{x\text{-muutos}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Huomautus. Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan pystysuoran suoran yhtälö on

$$\boxed{x = x_0}.$$

Huomautus. Jokaisen suoran yhtälö voidaan esittää myös muodossa

$$\boxed{ax + by + c = 0}.$$

Kääntäen: Jokainen muotoa $ax + by + c = 0$ oleva yhtälö esittää jotakin suoraa, jos ainakin toinen kertoimista a ja b eroaa nollasta.

Lause. Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Lauseen etäisyyskaava todistetaan geometrian kurssissa vektoreita käyttäen.

Etäisyyslauseen voi myös todistaa laskemalla ensin sen pisteen, jossa pisteestä (x_0, y_0) suoralle $ax + by + c = 0$ asetettu normaali leikkaa kyseistä suoraa, ja laskemalla lopuksi näiden kahden pisteen välisen etäisyyden.

Toteamme vielä, että **etäisyyskaavan osoittajassa on tietenkin lauseke, joka saa arvon nolla, jos tarkasteltava piste on suoralla**. Etäisyyskaavan osoittajassa oleva suoran yhtälön vasen puoli onkin juuri tällainen lauseke.

Etäisyyskaavan nimittäjää on vaikeampi tarkasti ymmärtää, mutta koska suoran yhtälön saa suoran muuttumatta kertoa millä tahansa nollasta eroavalla luvulla, niin etäisyyskaavan nimittäjässä on tietenkin oltava sellainen lauseke, joka tulee suoran yhtälöä kerrottaessa kerrottua samalla luvulla kuin osoittajassa oleva suoran yhtälön kertomisesta riippuva lausekekin.

Seuraavassa tarkastelemme edellisiin tuloksiin liittyviä esimerkkejä.

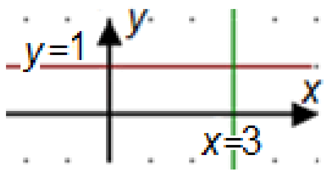
Esimerkki. Piste $(x, y) = (23, -45)$ on suoralla $6x + 5y + 87 = 0$, sillä pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön: $6 \cdot 23 + 5 \cdot (-45) + 87 = 0$.

Esimerkki. Suoran $2x + 5y - 4 = 0$ pisteitä löydetään antamalla toiselle muuttujalle (helppoja) arvoja ja ratkaisemalla toinen muuttuja.
Jos $x = -3$, niin $y = 2$, jolloin saadaan piste (-3, 2).
Jos taas $y = 0$, niin $x = 2$, jota vastaa piste (2, 0).

Esimerkki. Suora $y = 5x - 11$ leikkaa x-akselia kohdassa, jossa $y = 0$. Tällöin $0 = 5x - 11$ eli $x = 11/5 = 2.2$.

Esimerkki. Yhtälö $x = 3$ esittää kohdassa $x = 3$ olevaa pystysuoraa suoraa.

Yhtälö $y = 1$ esittää korkeudella $y = 1$ kulkevaa vaakasuoraa suoraa.

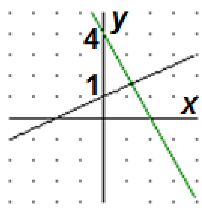


Esimerkki. Pisteiden (2,3) ja (4,−5) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - 3 = \frac{3-(-5)}{2-4} \cdot (x - 2) \quad \text{, josta ratkaisemalla} \quad y = -4x + 11.$$

Yhtälön löytää myös TI-Nspire CX CAS-laskimen regressiokomennoilla
LinRegMx $\{2,4\},\{3,5\}$
stat.results
Viimeksi regressiotoiminnolla määrätty funktio on käytettävissä nimellä
stat.RegEqn()

Esimerkki. Piirretään suorat $y = 0.5x + 1$ ja $y = -2x + 4$.



Suorat leikkaavat *y*-akselia kohdissa 1 ja 4. Suorien kulmakertoimet ovat 0.5 ja -2, joten yksikön matkalla edellinen suora nousee puoli yksikköä ja jälkimmäinen laskee 2 yksikköä. Koska kulmakertoimien tulo on -1, niin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kuvan koordinaatistossa, jossa akselien yksikköjanat ovat yhtä pitkät.

Esimerkki. Lasketaan pisteen (1, 2) etäisyys suorasta $y = 3x + 4$.

Suoran yhtälö on ensin muutettava etäisyyskaavan edellyttämään muotoon $-3x + 1y - 4 = 0$, jolloin kaavan merkinnöin

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \approx \underline{\underline{1.58}}$$

Toisin. Koska annetun suoran kulmakerroin on 3, niin pisteestä (1, 2) suoralle piirretyn normaalin kulmakerroin on $-1/3$ ja normaalin yhtälö on

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \qquad \text{eli} \qquad y = -x/3 + 7/3 .$$

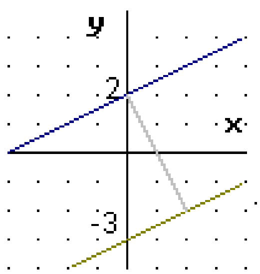
Normaalin ja annetun suoran leikkauspiste saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -x/3 + 7/3 \end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 5/2 \end{cases} .$$

Kysytty etäisyys on pisteiden (1, 2) ja $(-1/2, 5/2)$ välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(1 - (-1/2))^2 + (2 - 5/2)^2} \approx \underline{\underline{1.58}}$$

Esimerkki. Lasketaan yhdensuuntaisten suorien $y = 0.5x + 2$ ja $y = 0.5x - 3$ välinen etäisyys.



Huomaa, että kysyttyä etäisyyttä ei saa *y*-akselilla olevien leikkauskohtien pystysuorana etäisyytenä $2 - (-3) = 5$, sillä suorat eivät ole vaakasuoria!

Valitaan ensimmäiseltä suoralta jokin piste: $x = 0$, $y = 2$.

Lopuksi lasketaan valitun pisteen (0, 2) etäisyys toisesta suorasta. Laskut helpottuvat, jos kerromme suoran yhtälön kahdella, jolloin etäisyyskaavan edellyttämässä muodossa suoran yhtälö on $-x + 2y + 6 = 0$. Niinpä kysytty etäisyys on

$$d = \frac{|-0 + 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx \underline{\underline{4.47}} .$$

Huomaa, että esimerkissä suoran **yhtälön molemmat puolet saa kertoa samalla nollasta eroavalla luvulla** ilman, että vastaus muuttuu. Sen sijaan esimerkiksi etäisyyskaavan **lauseketta ei saa kertoa nimittäjällä**, koska tällöin kysytty etäisyyskin tulisi kerrottua nimittäjällä.

Harjoitustehtäviä

12.2.1 Piirrä suorat $y=\frac{x}{2}+3$, $y=-3x+2$, $3x-2y=6$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$, $x=3$ ja $y=-1$ käsin ja laskimella. Joillakin laskimilla piirrettäessä pitää ehkä ensin ratkaista suoran yhtälöstä *y*. TI-Nspire CX CAS-laskimella voit piirtää suoran muissakin kuin ratkaistussa muodossa Kuvaajat-tilan valinnoilla $\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{3}$: Kuvaajan syöttö/Muokkaus $\boxed{2}$: Yhtälö $\boxed{1}$: Suora

12.2.2 Millä kertoimen *t* arvolla suorat
v) $tx+3y+7=0$ ja $2x-3y+4=0$ **a)** $2x+ty-3=0$ ja $4x+3y-2=0$
ovat i) yhdensuuntaiset ii) kohtisuorat?

12.2.3 Määritä seuraavien suorien yhtälöt
a) suora kulkee pisteen (2, –1) kautta ja kulmakerroin on 3
b) suora leikkaa y-akselia korkeudella 2 ja suora on suoran $2x+3y-1=0$ suuntainen
c) suora kulkee pisteiden (2,1) ja $(-1,3)$ kautta (Mieti eri tapoja!)
d) suora kulkee pisteen $(3,-1)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $y=4x-2$ vastaan
e) suora on vaakasuora ja leikkaa *y*-akselia korkeudella 2
f) suora on pystysuora ja leikkaa *x*-akselia kohdassa $x=-3$
g) suora on pystysuora ja kulkee suorien $2x-y=0$ ja $3x+y=5$ leikkauspisteen kautta
h) *y*-akseli **i)** *x*-akseli

12.2.4 Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(2,-3)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa **v)** A(1,2)B(5,3) **a)** K(3,2)L(5,7) vastaan.

12.2.5 Määritä seuraavien nelikulmioiden lävistäjien leikkauspiste
v) A(1,2)B$(4,-2)$C(5,4)D(3,4) **a)** K(1,1)L(7,3)M(6,5)N(2,6)

12.2.6 Määritä sen kolmion pinta-ala, jonka suora **v)** A(1,2)B(10,4) **a)** K(2,7)L(5,4) muodostaa koordinaattiakselien kanssa.

12.2.7 Määritä pisteen $(3,-1)$ etäisyys suorasta
v) $y=2x+4$ **a)** $y=5x-2$ **b)** $y=2x-7$

12.2.8 Määritä kolmion **v)** A(2,0)B(5,4)C(3,1) **a)** A(1,2)B(5,5)C(2,6) pinta-ala laskemalla sivun AB pituus ja sitä vastaava korkeus.

12.2.9 Määritä yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys:
v) $y=\frac{x}{3}+6$ ja $y=\frac{x}{3}-2$ **a)** $y=-0.2x+1$ ja $y=-0.2x+7$

12.2.10 Ratkaise sekä graafisesti että laskimella seuraavat yhtälöparit

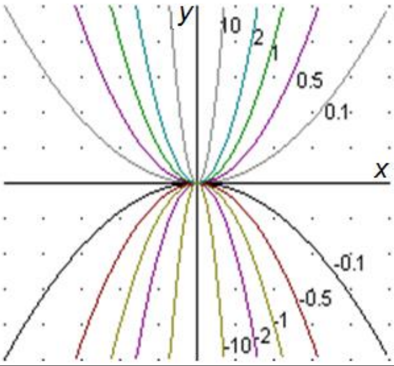
v1) $\begin{cases}2x+y=5\\3x-y=5\end{cases}$ **v2)** $\begin{cases}y=3x+1\\6x-2y=3\end{cases}$ **v3)** $\begin{cases}x-2y=4\\y=0.5x-2\end{cases}$

a) $\begin{cases}2x-y=1\\x+y=5\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}3x-2y=6\\-6x+4y=-12\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x-2y=3\\3x-6y=3\end{cases}$

12.3 Paraabeli

Yhtälö $y = a \cdot x^2$ esittää origohuippuista paraabelia, joka
- aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$
- aukeaa alaspäin, jos $a < 0$
- on sitä kapeampi mitä suurempi kertoimen *a* itseisarvo on.

Näitä paraabeleja sanotaan pystyakselisiksi, koska niiden symmetria-akseli on pystysuora.



Esimerkki. Edellä on hahmoteltu muutamia origohuippuisia paraabeleja $y = ax^2$, joiden viereen on merkitty kertoimen *a* arvo ± 0.1, ± 0.5, ± 1, ± 2, ± 10.

Paraabelia $y = x^2$ sanotaan **perusparaabeliksi**.

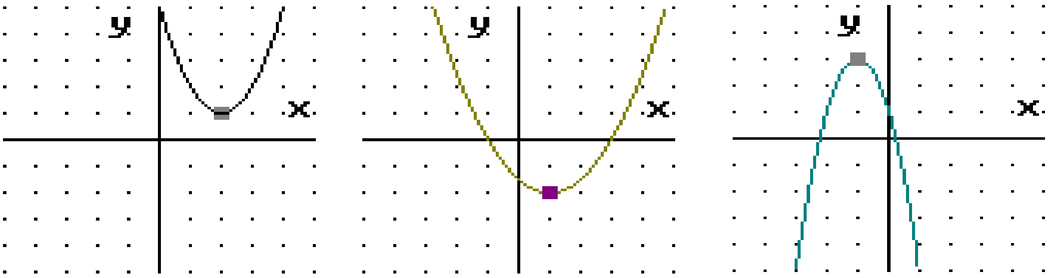
Huomautus. Paraabelin $y = ax^2$ muotokerroin *a* ilmaisee, kuinka monta yksikköä *y* muuttuu, kun *x* muuttuu ensimmäisen yksikön huipusta alkaen.

Lause. Mikäli paraabelin huippu on pisteessä (x_0, y_0) ja paraabeli on paraabelin $y = ax^2$ kokoinen ja asentoinen, niin paraabelin yhtälö on

$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2}\,.$$

Esimerkki. Muodostetaan seuraavan kuvan paraabelien yhtälöt.

Ensin kuvasta katsotaan huippu (x_0, y_0). Paraabelin yhtälössä oleva kerroin *a* saadaan katsomalla, kuinka paljon *y* muuttuu, kun *x* muuttuu ensimmäisen yksikön huipusta alkaen. Tulokset sijoitetaan yllä olevaan kaavaan ja lopuksi yhtälöstä voidaan vielä haluttaessa ratkaista *y*.



$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)^2$	$y - (-2) = 0.5 \cdot (x - 1)^2$	$y - 3 = -2 \cdot (x - (-1))^2$
$y = x^2 - 4x + 5$	$y = 0.5x^2 - x - 1.5$	$y = -2x^2 - 4x + 1$

Huomautus. Pystyakselisen paraabelin yhtälö voidaan edellisen esimerkin mukaisesti esittää aina myös aukikerrotussa ja ratkaistussa muodossa

$$\boxed{y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c}\,.$$

Tämän paraabelin huipun saa myöhemmin määritettyä helpoimmin derivoimalla. Nyt voimme joko suorittaa (käsin tai laskimella) neliöinnin tai käyttää huipun x-koordinaatille neliöimällä johdettavaa kaavaa $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla x-koordinaatti paraabelin yhtälöön.

Huomautus. Sivulle aukeavalle paraabelille on voimassa vastaavat kaavat, joissa vain x- ja y-koordinaattien merkitys on vaihtunut:

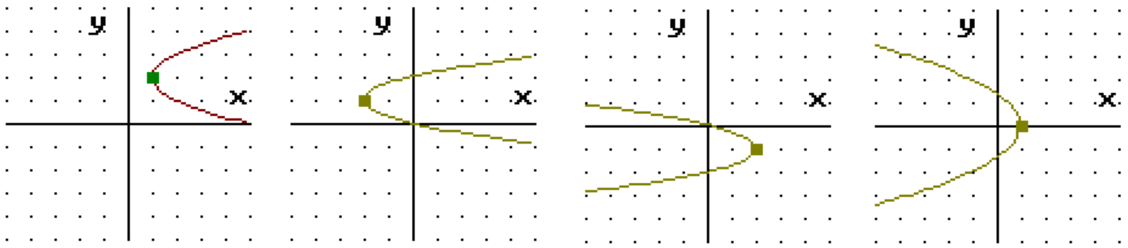
$$x = a\cdot y^2 \quad , \quad x - x_0 = a\cdot(y - y_0)^2 \quad , \quad x = a\cdot y^2 + b\cdot y + c \quad .$$

Kaavojen paraabelit aukeavat oikealle, jos $a > 0$, ja vasemmalle, jos $a < 0$.

Muotokerroin a ilmaisee, kuinka monta yksikköä x muuttuu, kun y muuttuu ensimmäisen yksikön huipusta alkaen.

Viimeisestä yhtälöstä voidaan laskea paraabelin huipun y-koordinaatti derivoimalla tai neliöimällä tai kaavalla $y_0 = -\dfrac{b}{2a}$, minkä jälkeen huipun x-koordinaatti saadaan sijoittamalla y-koordinaatti paraabelin yhtälöön.

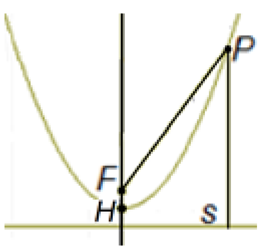
Esimerkki. Alla on joitakin vaaka-akselisia paraabeleja yhtälöineen:



$x - 1 = 1\cdot(y-2)^2$	$x - (-2) = 2\cdot(y-1)^2$	$x - 2 = -2\cdot(y-(-1))^2$	$x - 1 = -0.5\cdot(y-0)^2$
$x = y^2 - 4y + 5$	$x = 2y^2 - 4y$	$x = -2y^2 - 4y$	$x = -0.5y^2 + 1$

Huomautus. Jokaiseen paraabeliin liittyy tärkeitä geometrisia käsitteitä:

- paraabelin **akseli** tarkoittaa paraabelin symmetria-akselia
- paraabelin **huippu** H on paraabelin ja sen akselin leikkauspiste
- paraabelin **polttopiste** F on paraabelin sisällä oleva akselin piste etäisyydellä $1/(4|a|)$ paraabelin huipusta, missä a on yhtälössä esiintynyt paraabelin "muotokerroin"
- paraabelin **johtosuora** s on paraabelin ulkopuolella oleva paraabelin akselia vastaan kohtisuora suora, joka on samalla etäisyydellä paraabelin huipusta kuin polttopistekin, mutta eri puolella.



Esimerkki. Määritä sen vaaka-akselisen paraabelin yhtälö, jonka huippu on $(-3, 2)$ ja joka kulkee pisteen $(1, 4)$ kautta.

Sijoittamalla vaaka-akselisen paraabelin yhtälöön $x - x_0 = a\cdot(y - y_0)^2$ huipun koordinaatit saadaan paraabelin yhtälöksi $x-(-3)=a\cdot(y-2)^2$.
Paraabelin pisteen $(1, 4)$ koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön, joten $1-(-3)=a\cdot(4-2)^2$, mistä saadaan $a=1$.
Vastaus: Paraabelin yhtälö on siis $x-(-3)=1\cdot(y-2)^2$ eli $\underline{\underline{x=y^2-4y+1}}$

Esimerkki. Määritä pisteiden $(-1, 2)$, (1,6) ja (2,11) kautta kulkevan pystyakselisen paraabelin yhtälö.

Ratkaisu 1. Koska pystyakselisen paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$ ja tunnemme kolme paraabelin pistettä, niin saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases}(-1,2) \text{ on paraabelin piste}\\ (1,6) \text{ on paraabelin piste}\\ (2,11) \text{ on paraabelin piste}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = 1a - 1b + c\\ 6 = 1a + 1b + c\\ 11 = 4a + 2b + c\end{cases} \overset{\text{Laskimella}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}a = 1\\ b = 2\\ c = 3\end{cases}.$$

Vastaus: Paraabeli on $\underline{\underline{y = x^2 + 2x + 3}}$.

Ratkaisu 2. Käytetään TI-Nspire CX CAS-laskimen neliöllistä regressiotoimintoa komentoina

QuadReg {-1,1,2},{2,6,1}
stat.RegEqn(x) ↵ $x^2 + 2x + 3$

Esimerkki. Määritä pisteiden (5, 2), (1, 0) ja (5, -2) kautta kulkevan vaaka-akselisen paraabelin yhtälö.

Ratkaisu 1. Koska tunnemme kolme paraabelin pistettä ja vaaka-akselisen paraabelin yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$, niin saamme yhtälöryhmän

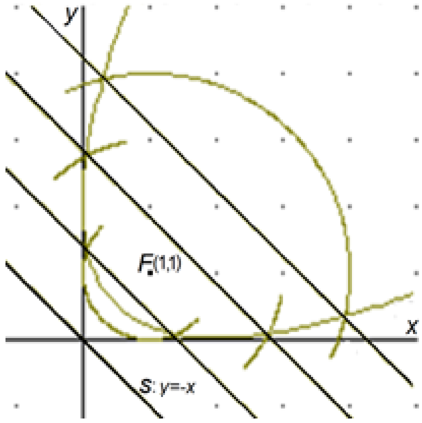
$$\begin{cases}5 = 4a + 2b + c\\ 1 = 0a + 0b + c\\ 5 = 4a - 2b + c\end{cases}, \text{ jonka ratkaisu on } \begin{cases}a = 1\\ b = 0\\ c = 1\end{cases}.$$

Vastaus: Paraabeli on $\underline{\underline{x = y^2 + 1}}$.

Ratkaisu 2. Vaihdetaan ratkaisun ajaksi *x*- ja *y*-koordinaatit keskenään ts. määritetään laskimen regressiotoiminnolla pisteiden (2,5), (0,1) ja (-2,5) kautta kulkevan pystyakselisen paraabelin yhtälö $y = x^2 + 1$. Vaihtamalla lopuksi paraabelin yhtälössä *x*- ja *y*-koordinaatit keskenään saadaan aiempi vastaus.

Huomautus. Voidaan osoittaa, että paraabeli muodostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta.

Esimerkki. Määritetään piirtämällä muutamia paraabelin pisteitä, kun on annettu paraabelin johtosuora s: $y=-x$ ja polttopiste $F(1,1)$.



Kuvassa on etsitty kuusi sellaista pistettä, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä. Pisteet etsitään piirtämällä polttopiste keskipisteenä ja mielivaltaisesti valittu r säteenä ympyrä. Toisaalta piirretään johtosuoran suuntainen suora r:n etäisyydelle johtosuorasta. Ympyrän ja suoran leikkauspisteet ovat yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta. Kuvassa on etsitty arvoja $r=1$, 2 ja 3 vastaavat paraabelin pisteet, joiden kautta paraabeli on lopuksi piirretty.

Esimerkki. Johdetaan edellisessä esimerkissä piirretyn vinosti aukeavan paraabelin yhtälö, kun polttopiste oli (1, 1) ja johtosuora $y=-x$.

Paraabelin pisteet ovat yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta, joten

(u,v) on paraabelin piste

$\Leftrightarrow$ pisteen (u,v) etäisyys pisteestä $(1,1)$

$=$ pisteen (u,v) etäisyys suorasta $x+y=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(u-1)^2+(v-1)^2}=\frac{|u+v|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

Korotetaan neliöön, kerrotaan 2:lla, siirretään termit vasemmalle ja suoritetaan laskut.

$$\Leftrightarrow u^2+v^2-2uv-4u-4v+4=0$$

Koska (u,v) on mielivaltainen paraabelin piste, niin korvaamalla u ja v tavallisemmin käytetyillä muuttujanimillä x ja v saadaan paraabelin yhtälöksi

$$\underline{\underline{x^2+y^2-2xy-4x-4y+4=0}}.$$

Koska paraabeli on vinossa, niin sen yhtälö ei ole mitään edellä esiteltyä muotoa, vaan yhtälöön tulee sekatermi xy.

Huomautus. Paraabeli esiintyy monissa fysikaalisissa ilmiöissä:

- Painovoimakentässä heitetyn kappaleen lentorata on paraabeli, jos ilmanvastus jätetään huomiotta.
- Paraabelin pyörähtäessä akselinsa ympäri syntyy paraboloidi. Kaikki symmetria-akselin suuntaisesti paraboloidin ”sisälle” saapuvat valonsäteet heijastuvat paraboloidin pinnasta polttopisteeseen ja kääntäen: Jos paraboloidin polttopisteeseen laitetaan valolähde, niin kaikki siitä lähtevät säteet heijastuvat paraboloidin pinnasta akselinsuuntaisena yhdensuuntaisten säteiden kimppuna, jonka intensiteetti säilyy vakiona tyhjiössä edetessään.

Harjoitustehtäviä

12.3.1 Piirrä seuraavat paraabelit käsin määrittämällä huippu, aukeamis-suunta ja muotokerroin. Tarkista kuva laskimella. Huomaa, että vaaka-akselisen paraabelin piirtäminen onnistuu joillakin laskimilla vain ratkaisemalla *y* yhtälöstä ja piirtämällä ratkaisufunktioiden kuvaajat.

a) $y = 2x^2$ **b)** $y = -0.5x^2$ **c)** $x = 0.5y^2$ **d)** $x = -3y^2$

e) $y - 1 = 2(x-2)^2$ **f)** $x + 2 = (y-3)^2$

g) $y = 2x^2 + 6x + 1$ **h)** $x = -0.5y^2 + 4y + 1$

12.3.2 Määritä sen pystyakselisen paraabelin yhtälö, jonka
v) huippu on (2,1) ja joka kulkee pisteen (0,9) kautta
a) huippu on $(-2,3)$ ja joka kulkee pisteen $(-3,0)$ kautta.

12.3.3 Määritä sen vaaka-akselisen paraabelin yhtälö, jonka
v) huippu on $(3,-1)$ ja joka kulkee pisteen (1,4) kautta
a) huippu on $(2,-3)$ ja joka kulkee pisteen $(-3,0)$ kautta.

12.3.4 Määritä pisteiden **v)** (1, 3), (2, 1) ja (4, 6) **a)** (1, 2), (3, 7) ja (4, 0) kautta kulkevan pystyakselisen paraabelin yhtälö sekä laskimen regressiotoimintoa käyttäen että sopivan yhtälöryhmän avulla.

12.3.5 Määritä pisteiden **v)** (3, –1), (1, 0) ja (6, 2) **a)** (1, 0), (3, 1), ja (7, 2) kautta kulkevan vaaka-akselisen paraabelin yhtälö sekä sopivan yhtälöryhmän avulla että laskimen regressiotoimintoa käyttäen.

12.3.6 Hae piirtämällä muutamia sen paraabelin pisteitä, jonka polttopiste on (3,0) ja johtosuoran yhtälö $y = x$.

12.3.7 **v)** Määritä edellisessä tehtävässä tarkastellun paraabelin yhtälö.

12.4 Ympyrä

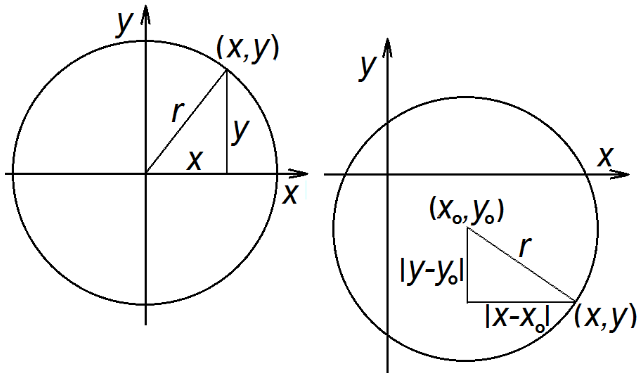
Pythagoraan lauseen avulla on helppo todeta seuraavan lauseen tulokset.

Lause. Origokeskisen *r*-säteisen ympyrän yhtälö on

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}\,.$$

(x_0, y_0)-keskisen, *r*-säteisen ympyrän yhtälö on

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}\,.$$



Huomautus. Mikäli neliöön korotukset suoritetaan auki ja vakiotermit yhdistetään, niin em. ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x_0 \cdot x - 2y_0 \cdot y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$. Näin ollen jokaisen ympyrän yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}\,.$$

Seuraavassa osoitetaan neliöimällä, että muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ oleva yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste ja säde saadaan yhtälöistä

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad , \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}\ ,$$

jos neliöjuuren alla oleva lauseke on positiivinen.

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ | Siirrä vakio oikealle, ryhmittele muuttujat ja ala neliöidä

$\Leftrightarrow (x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2}) + (y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{b}{2}) = -c$ | Täydennä sulkulausekkeet neliöityviksi trinomeiksi. Muista korjaustermit oikealle.

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = -c + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$ | Oletetaan, että oikea puoli > 0

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}^{\,2}$$

Esimerkki. Jos ympyrän keskipiste on (1, -2) ja säde on 3, niin ympyrän yhtälö on $\underline{\underline{(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = 3^2}}$ eli aukikerrottuna $\underline{\underline{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0}}$.

Esimerkki. Yhtälö $x^2+y^2+6x-8y=0$ esittää ympyrää, jonka keskipiste ja säde saadaan edellä olleilla kaavoilla:

$$(x_0,y_0)=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-\frac{6}{2},-\frac{-8}{2})=\underline{\underline{(-3\ ,\ 4)}}$$

$$r=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{6^2+(-8)^2}{4}-0}=\sqrt{25}=\underline{\underline{5}}$$

Nämä saataisiin myös neliöimällä edellä olleen mallin mukaisesti.

Huomaa, että esimerkiksi TI-Nspire CX CAS-laskimella voit täydentää annetun yhtälön neliöksi samanaikaisesti sekä muuttujan x että y suhteen komennolla

$$\text{completeSquare}(x^2+y^2+6x-8y=0,x,y)$$

jolloin vastauksesta $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ voit päätellä keskipisteen ja säteen.

Esimerkki. Määritä pisteiden (2, 1), (1, 3) ja (4, -1) kautta kulkeva ympyrä.

Ratkaisu. Ympyrän yhtälöä voidaan etsiä muodoissa

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \text{tai} \qquad x^2+y^2+ax+by+c=0\ .$$

Kummassakin yhtälössä on kolme tuntematonta x_0, y_0 ja r tai a, b ja c. Tarvitaan siis kolme ehtoa, jotka saadaan siitä, että tunnetut kolme pistettä toteuttavat ympyrän yhtälön.

Jos käytämme ensimmäistä muotoa olevaa yhtälöä, niin saamme käsinratkaistavaksi hankalan epälineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases}(2-x_0)^2+(1-y_0)^2=r^2\\(1-x_0)^2+(3-y_0)^2=r^2\\(4-x_0)^2+(-1-y_0)^2=r^2\end{cases}.$$

Toista yhtälöä käyttäen saamme helpomman lineaarisen ryhmän

$$\begin{cases}2^2+1^2+a\cdot 2+b\cdot 1+c=0\\1^2+3^2+a\cdot 1+b\cdot 3+c=0\\4^2+(-1)^2+a\cdot 4+b\cdot(-1)+c=0\end{cases}.$$

Lineaarinen ryhmä on paljon helpommin ratkaistavissa käsin kuin epälineaarinen ryhmä, mutta **apuvälineitä käytettäessä kannattaa valita se tapa, joka antaa jatkon kannalta käyttökelpoisemman yhtälön**.

Epälineaarisella ryhmällä on ratkaisut $r=\pm\frac{5\sqrt{10}}{2}$, $x_0=\frac{17}{2}$, $y_0=\frac{11}{2}$, joista säteen negatiivinen arvo ei tietenkään kelpaa. Ympyrän yhtälöksi saadaan siis

$$\underline{\underline{(x-17/2)^2+(y-11/2)^2=(5\sqrt{10}/2)^2}}\ .$$

Lineaarisen ryhmän ratkaisusta $a=-17$, $b=-11$, $c=40$ saadaan puolestaan ympyrän yhtälö aukikerrotussa muodossa $\underline{\underline{x^2+y^2-17x-11y+40=0}}$.

Harjoitustehtäviä

12.4.1 Määritä seuraavien ympyröiden keskipiste ja säde.

v1) $(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$ **v2)** $x^2+y^2+2x-6y+6=0$

a) $(x+1)^2+(y-4)^2=5^2$ **b)** $x^2+y^2-4x+2y-11=0$

Piirrä ympyrät käsin ja laskimella.

12.4.2 Millä vakion *c* arvoilla yhtälö

v) $x^2+y^2-6x+4y+c=0$ **a)** $x^2+y^2+4x-8y+c=0$

esittää i) ympyrää ii) pistettä iii) ei mitään?

12.4.3 Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on

v) $(-3,2)$ ja joka kulkee pisteen (0,0) kautta

a) $(2,-4)$ ja joka kulkee pisteen (1,2) kautta.

12.4.4 Määritä sen ympyrän yhtälö, joka kulkee pisteiden

v) (0,6), (7,5) ja $(3,-3)$ **a)** $(-4,1)$, $(4,5)$ ja $(5,-2)$ kautta.

12.5.5

12.4.5 Määritä ympyrän **v)** $(x-2)^2+(y-4)^2=5^2$ pisteeseen (5,0)

a) $(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$ pisteeseen $(2,-2)$ asetetun tangentin yhtälö.

12.4.6 Kuinka pitkän janan ympyrä $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$ erottaa suorasta

v) $y=x$ **a)** $y=2x-10$?

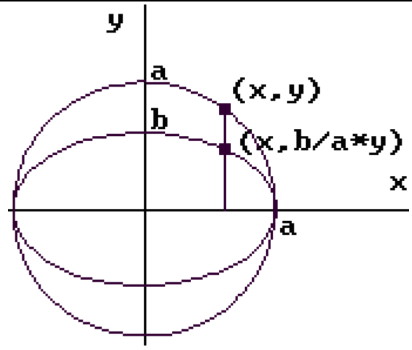
Opastus: Janan päätepisteitä ei välttämättä tarvitse laskea.

12.5 Ellipsi

Ellipsi syntyy venyttämällä tai kutistamalla origokeskistä *a*-säteistä ympyrää

$$x^2+y^2=a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

pystysuunnassa suhteessa $b{:}a$.



Ellipsin pisteiden *y*-koordinaatit saadaan siis kertomalla ympyrän pisteiden *y*-koordinaatit luvulla *b/a,* joten ellipsin pisteille on voimassa

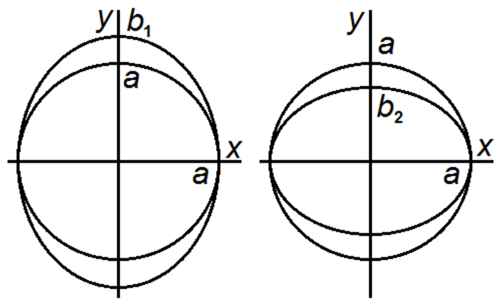
$$y=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2} \quad \overset{\text{Jaa kertoimella } b,\ \text{korota neliöön}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ .$$

Origokeskisen ellipsin yhtälö on siis

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \ ,$$

missä **puoliakselit** *a* ja *b* ilmoittavat, millä etäisyydellä keskipisteestä origokeskinen ellipsi leikkaa koordinaattiakseleita.

Esimerkki. Kuvien a-säteisistä ympyröistä saadaan pystysuunnassa venyttämällä ($b_1 > a$) tai kutistamalla ($b_2 < a$) kuvien mukaiset ellipsit.



Lause. Jos ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ siirretään suuntansa ja suuruutensa säilyttäen siten, että ellipsin keskipiste on (x_0, y_0), niin ellipsin yhtälö on

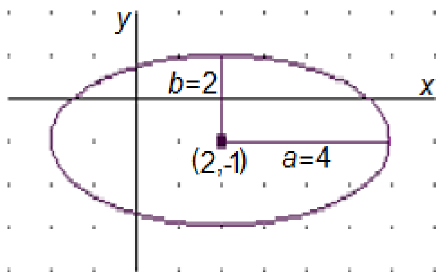
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Esimerkki. Kuvan ellipsin yhtälö on

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-(-1))^2}{2^2} = 1 .$$

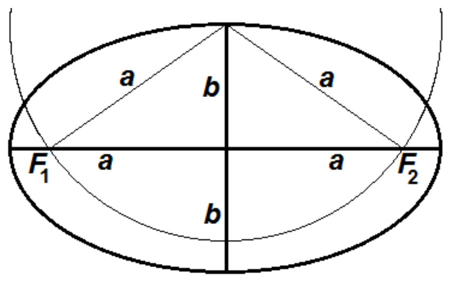
Suorittamalla neliöönkorotukset, kertomalla yhtälö 16:lla ja siirtämällä kaikki termit vasemmalle saadaan

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0 .$$



Huomautus. Ellipsiin $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ liittyy tärkeitä käsitteitä:

- **Keskipiste** (x_0, y_0) on ellipsin symmetriakeskipiste.
- **Pääakselit** ovat keskipisteen kautta kulkevat ellipsin pisin ja lyhin jänne. Pääakseleista pidempää sanotaan **isoakseliksi** ja lyhyempää **pikkuakseliksi**. Niiden puolikkaat ovat **puoliakseleita**. Puoliakseleiden pituudet ovat a ja b. Ellipsi on symmetrinen kummankin pääakselinsa suhteen.
- **Polttopisteet** F_1 ja F_2 sijaitsevat isoakselilla kohdissa, jotka löydetään piirtämällä ellipsin pikkuakselin päätepiste keskipisteenä ympyrä, jonka säde on pidempi puoliakseli.



Huomautus. Ellipsi esiintyy monissa fysikaalisissa ilmiöissä:

- Jos muiden taivaankappaleiden vaikutus jätetään huomiotta, niin maa kulkee auringon ympäri pitkin ellipsin muotoista rataa, jonka toisessa polttopisteessä on aurinko.
- Ellipsin pyörähtäessä pääakselinsa ympäri syntyy ellipsoidi. Jos ellipsoidin polttopisteeseen laitetaan pistemäinen valolähde, niin kaikki siitä lähtevät säteet heijastuvat ellipsoidin pinnasta toiseen polttopisteeseen.
- Jos valonsäteet ovat yhdensuuntaisia, niin pallon varjo tasolla on ellipsi.

Huomautus. Jos ellipsin pääakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, niin aiemman esimerkin mukaisesti ellipsin yhtälö voidaan kertoa auki muotoon

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

missä kertoimet A ja B ovat samanmerkkiset. Erityisesti ympyrällä kertoimet olivat yhtä suuret (tai jopa ykköset, jos yhtälö jaetaan ko. kertoimella).

Kääntäen: Jos yo yhtälössä $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ kertoimet A ja B ovat samanmerkkiset, niin yhtälö esittää jotakin ellipsiä (tai sen erikoistapausta ympyrää tai pistettä), mikäli se esittää jotakin reaalista käyrää. Tätä ellipsin aukikerrottua yhtälöä voi tutkia neliöimällä käsin tai laskimella.

Esimerkki. a) Tutkitaan käsin yhtälöä muokaten käyrää

$$\begin{aligned}
&4x^2 + 9y^2 - 4x + 18y - 26 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &4(x^2 - 2\cdot x\cdot 0.5) + 9(y^2 + 2\cdot y\cdot 1) = 26 \\
\Leftrightarrow\ &4(x^2 - 2\cdot x\cdot 0.5 + 0.5^2) + 9(y^2 + 2\cdot y\cdot 1 + 1^2) = 26 + 4\cdot 0.5^2 + 9\cdot 1^2 \\
\Leftrightarrow\ &4(x-0.5)^2 + 9(y+1)^2 = 36 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-0.5)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1
\end{aligned}$$

Kyseessä on (0.5 , -1) -keskinen ellipsi, jonka puoliakselit ovat 3 ja 2.

b) Vastaavasti yhtälö

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 44 = 0$$

voidaan vaikkapa laskimella neliöidä muotoon

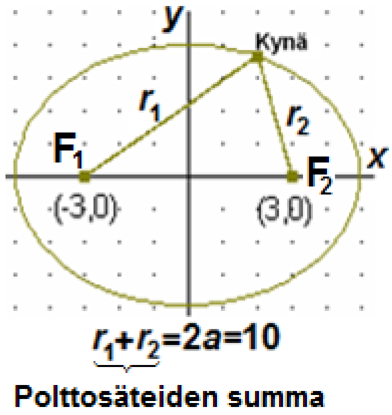
$$9(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = -4.$$

Tämä yhtälö ei toteudu missään pisteessä (x, y), koska vasen puoli on aina einegatiivinen lasketaanhan siinä neliötermit positiivisilla kertoimilla kerrottuina yhteen. Niinpä alkuperäinenkään yhtälö ei voi toteutua missään pisteessä (x, y) eli yhtälö ei esitä mitään reaalista käyrää eikä edes yksittäistä pistettä.

Huomautus. Voidaan todistaa, että ellipsi on niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä (= em. polttopisteistä) laskettujen etäisyyksien (eli ns polttosäteiden) summa on vakio (= isoakselin pituus).

Esimerkki. Piirretään edelliseen huomautukseen perustuen ”naru ja nastat” -menetelmällä ellipsi, jonka isoakseli on 10 yksikköä ja polttopisteiden väli 6 yksikköä.

Piirtäminen tapahtuu kiinnittämällä 10 yksikköä pitkän narun päät nastoilla valittuihin polttopisteisiin $F_1(-3,0)$ ja $F_2(3,0)$. Naru kiristetään kynän kärjellä kireäksi, minkä jälkeen ellipsi voidaan piirtää siirtäen kynää siten, että naru on koko ajan kireällä.



Harjoitustehtäviä

12.5.1 Mikä on sen ellipsin yhtälö, joka saadaan 4-säteisestä ympyrästä

v) venyttämällä se vaakasuunnassa kaksinkertaiseksi ja siirtämällä keskipiste pisteeseen $(2,-5)$?

a) venyttämällä se pystysuunnassa kaksinkertaiseksi ja siirtämällä keskipiste pisteeseen $(3,4)$?

b) kutistamalla se pystysuunnassa puoleen ja siirtämällä keskipiste pisteeseen $(-2,3)$?

12.5.2 Piirrä käsin ja laskimella käyrät

a) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ **b)** $4x^2+9y^2=36$ **c)** $\dfrac{(x-1)^2}{3^2}+\dfrac{(y+2)^2}{2^2}=1$

d) $(x+2)^2+16(y+3)^2=4$ **e)** $9x^2+4y^2-54x+16y+61=0$

Ellipsin piirtäminen onnistuu joillakin laskimilla vain ratkaisemalla *y* ellipsin yhtälöstä ja piirtämällä ratkaisufunktioiden kuvaajat. Laskimella TI-Nspire CX CAS voit piirtää ellipsin täydentämällä ellipsin yhtälöön $\dfrac{(x-\square)^2}{\square^2}+\dfrac{(y-\square)^2}{\square^2}=1$ keskipisteen koordinaatit ja puoliakselit. Jos yhtälössä on suoritettu neliöönkorotukset **e**-kohdan lailla tai ellipsin symmetria-akselit ovat vinossa, niin ellipsin voi piirtää kohdan 12.7 mukaisena yleisenä kartioleikkauksena $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$.

12.5.3 Millä vakion *t* arvoilla annettu yhtälö esittää (i) ellipsiä (ii) pistettä (iii) ei mitään? Jos kyse on ellipsistä, niin määritä sen keskipiste ja puoliakselit.

v1) $9x^2+4y^2-18x+16y+t=0$

a) $4x^2+25y^2+16x-200y+t=0$

12.5.4 Määritä sen ellipsin keskipiste ja pääakseleiden päätepisteet, jonka polttopisteet ovat (-2, 3) ja (-2, 9) ja jonka polttosäteiden summa (eli piirtämisessä käytettävän ”narun” pituus) on 10 yksikköä. Määritä myös ellipsin yhtälö.

12.6 Hyperbeli

Muuttamalla yhtä merkkiä ellipsin yhtälössä saadaan kahden erilaisen hyperbelin yhtälöt

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \quad \text{tai} \quad \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}\,.$$

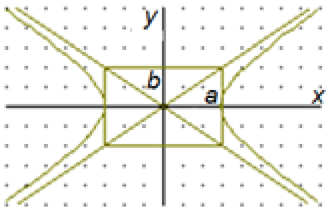
Edellinen käyrä leikkaa *x*-akselia, kun $y=0$ eli pisteissä $x=\pm a$, mutta ei leikkaa lainkaan *y*-akselia. Jälkimmäinen käyrä leikkaa puolestaan *y*-akselia, kun $x=0$ eli pisteissä $y=\pm b$, mutta ei leikkaa lainkaan *x*-akselia.

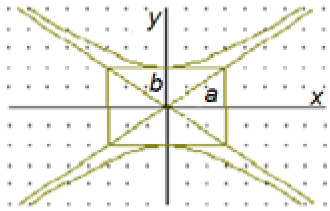
Kummastakin yhtälöstä nähdään, että jos $|x|$ on suuri, niin

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}\mp 1\right)}=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2\mp a^2}\approx\pm\frac{b}{a}\cdot|x|=\pm\frac{b}{a}\cdot x \quad ,$$

toisin sanoen suurilla $|x|$:n arvoilla hyperbelin kuvaaja on lähellä suoria $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$. Kyseiset suorat ovat hyperbelien **asymptootteja** ja niitä voidaan käyttää piirtämisessä apuna seuraavasti:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$





$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

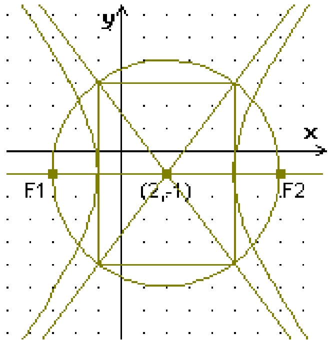
Huomautus. Jos hyperbelin keskipiste on (x_0, y_0), niin hyperbelin yhtälö on aukeamissuunnasta riippuen

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1} \quad \text{tai} \quad \boxed{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}\,.$$

Näiden yhtälöiden määrittämään hyperbeliin liittyy tärkeitä käsitteitä:

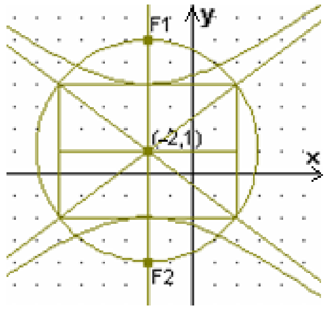
- hyperbelin **keskipiste** (x_0,y_0), joka on hyperbelin symmetriakeskus
- **puoliakselit** *a* ja *b*, joita käytettiin jo edellä asymptoottien piirtämisessä tarvittavan laatikon sivujen puolikkaina
- **polttopisteet**, jotka sijaitsevat etäisyydellä $\sqrt{a^2+b^2}$ (eli ”laatikon” lävistäjän puolikkaan etäisyydellä) keskipisteestä sillä pääakselilla, joka leikkaa hyperbeliä. Polttopisteet jäävät siis hyperbelin haarojen "sisään" ja ne löydetään piirtämällä hyperbelin keskipiste keskipisteenä ympyrä, jonka säde on em. laatikon lävistäjän puolikas. Piirretty ympyrä leikkaa hyperbelin huippujen kautta kulkevaa pääakselia polttopisteissä.

Esimerkki. Hahmottele polttopisteineen hyperbelit



a) $\frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{4^2} = 1$

Keskipiste (2, -1), puoliakselit 3 ja 4.
Aukeaa sivuille (sillä leikkaa keskipisteen kautta kulkevaa vaakasuoraa suoraa $y=-1$, mutta ei pystysuoraa suoraa $x=2$, koska tällä sijoituksella hyperbelin yhtälö on mahdoton).



b) $-\frac{(x+2)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$

Keskipiste (-2, 1), puoliakselit 4 ja 3.
Aukeaa ylös ja alas (sillä leikkaa keskipisteen kautta kulkevaa pystysuoraa suoraa $x=-2$, mutta ei vaakasuoraa suoraa $y=1$).

Huomautus. Voidaan todistaa, että hyperbeli on niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä (= em. polttopisteistä) laskettujen etäisyyksien erotus on vakio.

Huomautus. Hyperbelit esiintyvät mm. taivaankappaleiden radoissa ja varattujen hiukkasten liikkeissä sähkökentissä. Niitä hyödynnetään mm. satelliittien avulla tapahtuvassa paikan määrityksessä.

Harjoitustehtäviä

12.6.1 Piirrä käsin ja laskimella käyrät

a) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

b) $4x^2 - 9y^2 = -36$

c) $\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$

d) $x^2 - 2y^2 + 4x + 4y = 0$

e) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 101 = 0$

Huomaa, että hyperbelinkin piirtäminen onnistuu joillakin laskimilla vain ratkaisemalla *y* yhtälöstä ja piirtämällä ratkaisufunktioiden kuvaajat. Laskimella TI-Nspire CX CAS voit piirtää hyperbelin täydentämällä joko yhtälöön $\frac{(x-\square)^2}{\square^2} - \frac{(y-\square)^2}{\square^2} = 1$ tai yhtälöön $\frac{(x-\square)^2}{\square^2} - \frac{(y-\square)^2}{\square^2} = -1$ keskipisteen koordinaatit ja puoliakselit. Jos yhtälössä on suoritettu neliöönkorotukset d- ja e-kohtien lailla tai hyperbelin symmetria-akselit ovat vinossa, niin hyperbelin voi piirtää kohdan 12.7 mukaisena yleisenä kartioleikkauksena $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

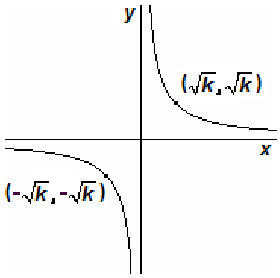
12.7 Yhteenveto toisen asteen käyristä

Edellä käsitellyt paraabeli, ympyrä, ellipsi ja hyperbeli ovat ns. **toisen asteen käyriä**. Nimensä nämä käyrät ovat saaneet siitä, että niiden yhtälö on muotoa

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0,$$

missä ainakin yksi kertoimista *A, B* ja *C* eroaa nollasta. Jos yhtälössä sekatermin *xy* kerroin $C=0$, niin käyrällä on pysty- ja/tai vaakasuora symmetria-akseli. Jos taas sekatermin kerroin $C\neq 0$, niin yhtälön esittämä käyrä on vinossa koordinaattiakseleihin nähden.

Esimerkki. Jos $k>0$, niin toisen asteen yhtälön $xy-k=0$ (eli $y=k/x$) kuvaaja on kuvan mukainen vinosti aukeava hyperbeli, jonka symmetria-akselit ovat 45 asteen kulmassa koordinaattiakseleihin nähden. Jos tätä käyrää kierretään myötäpäivään origon ympäri $45°$, niin saadaan edellä käsitelty sivuille aukeava hyperbeli $\dfrac{x^2}{\sqrt{2k}^{\,2}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2k}^{\,2}}=1.$



Jokainen muotoa $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ oleva yhtälö esittää jotakin em. käyristä paraabeli, ympyrä, ellipsi ja hyperbeli tai näiden surkastunutta muotoa pistettä, suoraa tai kahta suoraa, jos yhtälö esittää jotakin.

Esimerkki.

Yhtälö	Yhtälö muokattuna	Kuvaaja
$x^2+y^2-2x-4y+5=0$	$(x-1)^2+(y-2)^2=0$	Piste (1, 2)
$x^2-y^2=0$	$y^2=x^2$	Kaksi suoraa $y=\pm x$
$x^2+y^2+2xy=0$	$(x+y)^2=0$	Suora $y=-x$
$x^2+y^2+1=0$	$x^2+y^2=-1$	Ei kuvaajaa

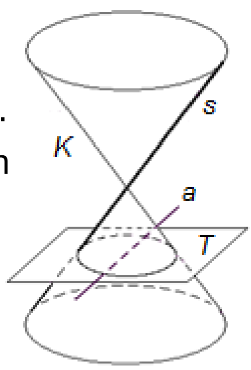
Toisen asteen käyriä kutsutaan myös **kartioleikkauksiksi**, koska ne saadaan leikkaamalla ympyräkartiopintaa (”kaksoiskartiota”) tasolla.

Viereisessä kuvassa on pystysuoraa ympyräkartiopintaa *K* leikattu vaakasuoralla tasolla *T*, jolloin leikkausviiva on ympyrä.

Jos tasoa *T* kallistetaan vastapäivään tasossa kulkevan akselin *a* ympäri, niin leikkausviivaa venyy muuttuen ellipsiksi.

Tasoa edelleen kierrettäessä ellipsi venyy äärettömän pitkäksi paraabeliksi, kun kartion sivuviiva *s* on tason *T* suuntainen.

Kiertämistä jatkettaessa taso leikkaa kaksoiskartion ylempääkin osaa, jolloin leikkausviiva on kaksihaarainen hyperbeli.



12.8 Napakoordinaateista

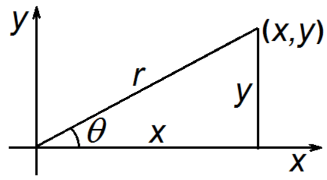
On tilanteita, joissa geometrisen viivan yhtälö helpottuu huomattavasti, jos suorakulmaisten koordinaattien x ja y asemasta käytetään napakoordinaatteja r ja θ (usein käytetään myös symbolia φ).

Koordinaatti r ilmoittaa pisteen etäisyyden origosta (eli navasta) ja koordinaatti θ ilmoittaa origosta pisteeseen piirretyn puolisuoran vaihekulman positiivisen x-akselin (eli napa-akselin) suhteen. Vaihekulma θ rajoitetaan tavallisesti välille $-\pi < \theta \leq \pi$ tai $0 \leq \theta < 2\pi$. Kulmayksikkönä voi käyttää myös astetta.

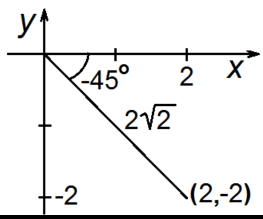
Jos viivassa on useita "kierroksia", niin vaihekulmaa ei rajoiteta 2π:n mittaiselle välille, vaan vaihekulma kasvaa vastapäivään kierrettäessä jokaisella kierroksella 2π:n verran.

Kuvasta saadaan napakoordinaattien ja suorakulmaisten koordinaattien väliset yhteydet, jotka ovat voimassa kaikissa tasoneljänneksissä:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}}$$



Jos ratkaiset kulman θ kaavojen avulla, niin huomioi neljänneksen valinta!

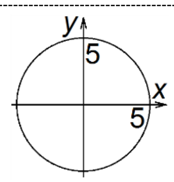


Koordinaattimuunnokset kannattaa tehdä laskimella, esimerkiksi laskimen TI-Nspire CX CAS komennoilla

$[2, -2]$ ▷Polar $\boxed{\hookleftarrow}$ $[2\sqrt{2} \quad \angle -45°]$

$[2\sqrt{2}, \angle -45°]$ ▷Rect $\boxed{\hookleftarrow}$ $[2 \quad -2]$

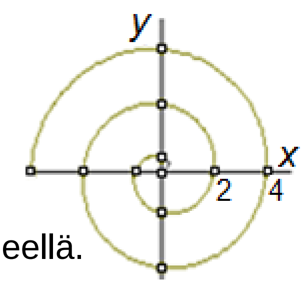
Esimerkki. Napakoordinaattiyhtälö $r = 5$ esittää kaikkia niitä tason pisteitä, joiden origosta laskettu etäisyys on 5 yksikköä vaihekulman θ arvosta riippumatta.
Kyseessä on siis 5-säteinen origokeskinen ympyrä.



Esimerkki. Piirretään napakoordinaatistokäyrä $r = \theta/\pi$, $0 \leq \theta \leq 5\pi$.

Tapa 1. Lasketaan käyrän pisteitä, jotka sijoitetaan koordinaatistoon. Pisteiden kautta piirretään lopuksi sopiva viiva.

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$	5π
r	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5



Tapa 2. Käyrä kannattaa tietenkin piirtää sopivalla apuvälineellä. Laskimella TI-Nspire CX CAS piirrettäessä on valittava

$\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{3}$: Kuvaajan syöttö/Muokkaus $\boxed{4}$: Polaarinen

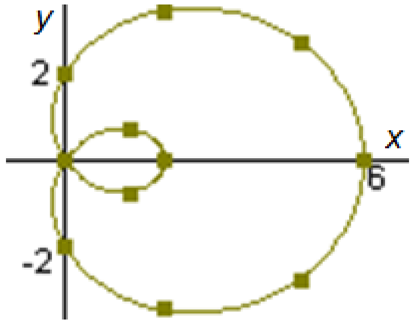
142

Esimerkki. Piirretään napakoordinaatistokäyrä $r = 2 + 4\cos\theta$.

Koska käyrä on jaksollinen 360°:n välein, niin voimme rajoittua välille 0 … 360°.

θ/°	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
r	6	5.5	4	2	0	–1.5	–2	–1.5	0	2	4	5.5	6

Välillä 120°<θ<240° etäisyys *r* on negatiivinen.



Negatiiviset *r*-arvot voidaan tulkita eri tavoin:

- Koska etäisyys ei voi olla negatiivinen, niin vastaavat pisteet ovat mahdottomia eikä niitä sijoiteta koordinaatistoon.
- Negatiivisen etäisyyden omaavat pisteet sijoitetaan päinvastaiseen suuntaan $|r|$:n määräämälle etäisyydelle.

Kuvan pikkusilmukan voi ensimmäisen tulkinnan mukaan jättää piirtämättä.

Esimerkki. Napakoordinaatistokäyrää $r = 4 \cdot \sin\theta$ voidaan tietenkin tutkia piirtämällä se käsin pisteittäin tai laskimella.

Nyt voimme kuitenkin siirtyä helppoon karteesiseen yhtälöön, kun alkuperäinen yhtälö ensin kerrotaan puolittain *r*:llä.

$$r^2 = 4 \cdot r\sin\theta \quad \Big| \text{ käytetään edellisen sivun muunnoskaavoja}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \overset{\text{neliöimällä}}{\Leftrightarrow} \quad (x-0)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

Kyseessä on siis ympyrä, jonka keskipiste (0,2) ja säde 2.

Harjoitustehtäviä

12.8.1 Määritä pisteiden (2,2) , (-2,2) , (-2,-2) ja (2,-2) napakoordinaatit
(i) kuvaa (ii) kaavoja (iii) laskimen koordinaattimuunnosta käyttäen.

12.8.2 Määritä pisteen $r = 4$, $\theta = 225°$ suorakulmaiset koordinaatit
(i) kuvaa (ii) kaavoja (iii) laskimen koordinaattimuunnosta käyttäen.

12.8.3 Piirrä käsin napakoordinaatistokäyrä, kun siltä tunnetaan pisteet

θ / °	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
r	4	3	2	1	0	–1	–2	–1	0	1	2	3	4

12.8.4 Piirrä sekä käsin että laskimella napakoordinaatistokäyrät
a) $r = 2 - 4\cos\theta$ **b)** $r = 3 + 6\sin\theta$.

12.8.5 Esitä suorakulmaisten koordinaattien avulla napakoordinaattiyhtälöt

v1) $r = \dfrac{2}{\sin\theta}$ **v2)** $r = 6\cos\theta$ **v3)** $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

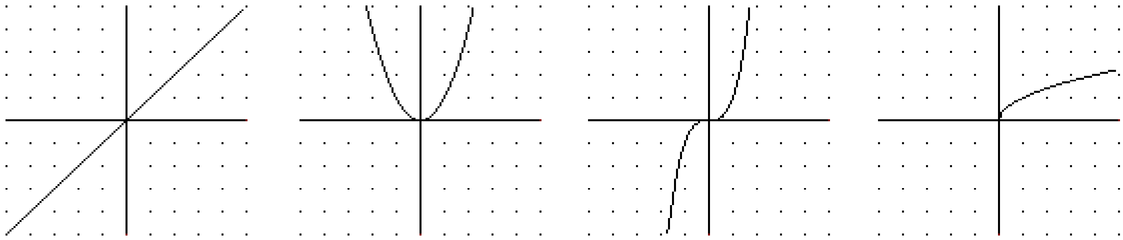
a) $r = 3\sin\theta$ **b)** $r\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ **c)** $r = \dfrac{3}{\cos(\theta + 45°)}$

13. POTENSSI-, POLYNOMI- JA EKSPONENTTIFUNKTIOISTA

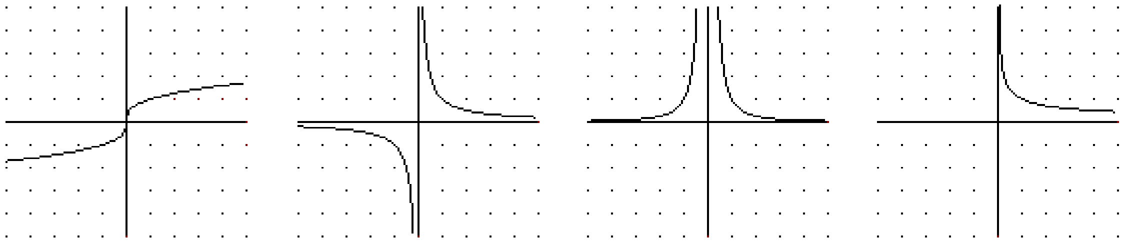
13.1 Potenssifunktioista

Määritelmä. **Potenssifunktio** on muotoa $y = x^k$ oleva funktio, missä eksponenttina on vakio k ja kantalukuna on muuttuja x.

Tavallisimpien potenssifunktioiden kuvaajia ovat

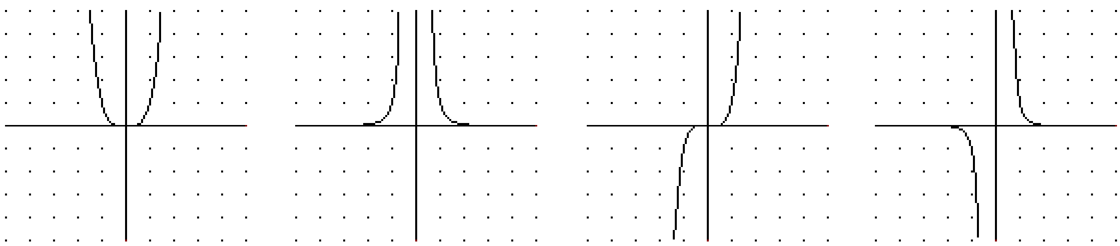


$y = x$ $\quad$ $y = x^2$ $\quad$ $y = x^3$ $\quad$ $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$



$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

Alla on hahmoteltu tyypillisten **kokonaispotenssifunktioiden** kuvaajat, jotka riippuvat erityisesti eksponentin merkistä ja parillisuudesta tai parittomuudesta.
(Kuvissa merkityt pisteet ovat kokonaislukupisteitä ja eksponentissa oleva luku $n = 2$)



$y = x^{2n}$	$y = x^{-2n} = 1/x^{2n}$	$y = x^{2n+1}$	$y = x^{-2n-1} = 1/x^{2n+1}$
eksponentti parillinen positiivinen kokonaisluku	eksponentti parillinen negatiivinen kokonaisluku	eksponentti pariton positiivinen kokonaisluku	eksponentti pariton negatiivinen kokonaisluku
Parillisia funktioita, koska kuvaajat symmetrisiä y-akselin suhteen		Parittomia funktioita, koska kuvaajat symmetrisiä origon suhteen	

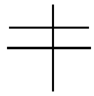
13.2 Polynomifunktioista

Seuraavassa tarkastelemme polynomifunktioiden

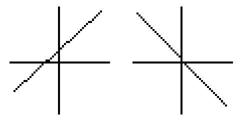
$$y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

kuvaajia ensin vaiheittain asteluvun n kasvaessa. Sivun oikeaan reunaan on piirretty kullekin asteluvulle tyypillisiä polynomifunktioiden kuvaajia.

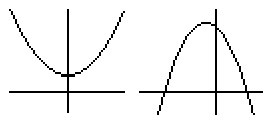
Jos asteluku $n = 0$, niin kyseessä on vakiopolynomi $y = a_0$, jonka kuvaaja on vaakasuora viiva.



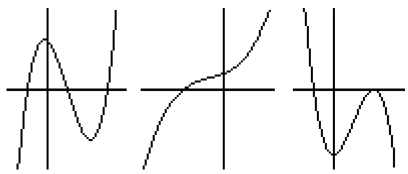
Ensimmäisen asteen polynomifunktion $y = a_1 x + a_0$ kuvaaja on joko nouseva tai laskeva suora riippuen johtavan termin kertoimen a_1 merkistä.



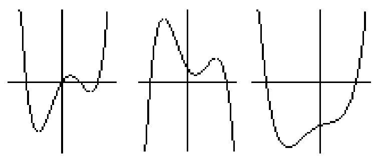
Toisen asteen polynomifunktion $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kuvaaja on joko ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli riippuen johtavan termin kertoimen a_2 merkistä. Paraabelilla ja x-akselilla (tai millä tahansa muulla vaakasuoralla suoralla) on 0 - 2 yhteistä pistettä..



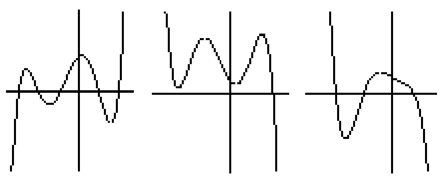
Kolmannen asteen polynomifunktion $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kuvaaja kulkee joko vasemmalta alhaalta oikealle ylös tai vasemmalta ylhäältä oikealle alas sen mukaan, onko kerroin a_3 positiivinen tai negatiivinen. Kuvaajassa on nolla tai kaksi ns. paikallista ääriarvoa (maksimi ja minimi, "huippu" ja "laakso"). Kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajalla ja x-akselilla (tai millä tahansa muulla vaakasuoralla suoralla) on 1 – 3 yhteistä pistettä.



Neljännen asteen polynomifunktion kuvaaja "aukeaa" joko ylös- tai alaspäin sen mukaan onko johtavan termin kerroin positiivinen tai negatiivinen. Neljännen asteen polynomifunktion kuvaajassa on 1 tai 3 paikallista ääriarvoa ja kuvaajalla on 0 - 4 yhteistä pistettä x-akselin kanssa.



Viidennen asteen polynomifunktion kuvaaja kulkee joko vasemmalta alhaalta oikealle ylös tai vasemmalta ylhäältä oikealle alas sen mukaan, onko johtavan termin kerroin positiivinen tai negatiivinen. Kuvaajassa on nolla, kaksi tai neljä paikallista ääriarvoa. Viidennen asteen polynomifunktion kuvaaja leikkaa x-akselin (tai minkä tahansa muun vaakasuoran suoran) vähintään yhdessä, mutta enintään viidessä eri pisteessä.



Yleisesti polynomifunktiot voidaan jakaa kahteen ryhmään sen mukaan, onko asteluku n pariton vai parillinen:

Paritonta astetta n olevan polynomifunktion kuvaaja kulkee joko vasemmalta alhaalta oikealle ylös tai vasemmalta ylhäältä oikealle alas riippuen johtavan termin kertoimen merkistä. Kuvaaja leikkaa x-akselia vähintään kerran ja enintään n kertaa. Kuvaajassa voi olla parillinen määrä paikallisia ääriarvoja, kuitenkin enintään $n-1$ ääriarvoa.

Parillista astetta n olevan polynomifunktion kuvaaja aukeaa joko ylös- tai alaspäin riippuen johtavan termin merkistä. Kuvaaja ei välttämättä leikkaa x-akselia kertaakaan ja toisaalta tällaisia leikkauspisteitä on enintään n kappaletta. Kuvaajassa on pariton määrä paikallisia ääriarvoja, kuitenkin enintään $n-1$ ääriarvoa.

Polynomifunktioiden kuvaajia on helppo tutkia myöhemmin derivaatan avulla.

13.3 Eksponenttifunktioista

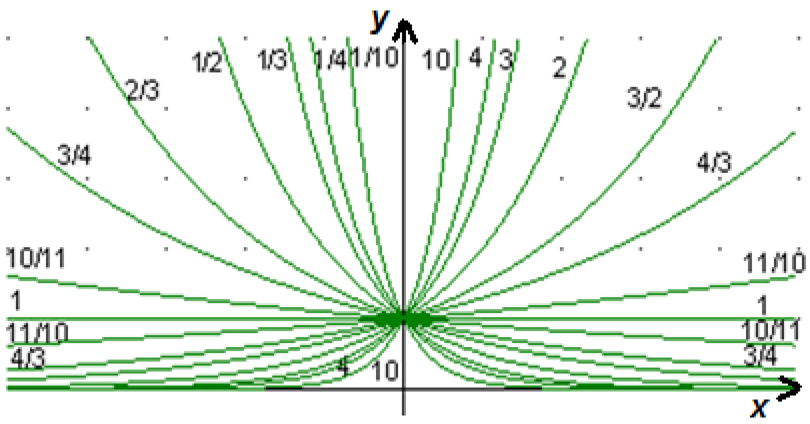
Määritelmä. Eksponenttifunktio tarkoittaa muotoa

$$y = k^x$$

olevaa funktiota, missä kantaluku k on positiivinen vakio ja eksponenttina on muuttuja x.

Viereiseen kuvaan on piirretty joukko kauniisti kaartuvia eksponenttifunktioita $y = k^x$.

Useimpien kuvaajien molempiin päihin on merkitty eksponenttifunktion kantaluku k.



Eksponenttifunktioiden $y = k^x$ kuvaajille on ominaista:

- Kuvaajat leikkaavat y-akselia kohdassa 1 .
- Kuvaajat ovat nousevia, jos $k > 1$.
- Kuvaajat ovat laskevia, jos $0 < k < 1$.
- Jos $x > 0$, niin kuvaaja on sitä ylempänä, mitä suurempi on kantaluku k.
- Kuvaajien suuruusjärjestys vaihtuu päinvastaiseksi kohdassa $x = 0$.

Eksponenttifunktioiden yhteydessä käytetään useimmiten kantalukuna ns. **Neperin lukua** $e \approx 2.718281828$, sillä e-kantaiseen eksponenttifunktioon liittyy differentiaali- ja integraalilaskennassa kaikkein helpoimmat laskusäännöt.

Laskimissa on yleensä oma näppäin Neperin luvun potenssien laskemiseksi tai e-kantaisen eksponenttifunktion käsittelemiseksi. Huomaa, että laskimen tavallinen e-kirjain ei tarkoita Neperin lukua.

Myöhemmin nähdään, että jokainen eksponenttifunktio $y = k^x$ (k>0) voidaan lausua e-kantaisena eksponenttifunktiona muodossa

$$y = e^{bx}$$

missä b on sopiva kantaluvusta k riippuva luku (ns. k:n luonnollinen logaritmi, jota merkitään $\ln k$). Koska $e^{bx} = (e^b)^x$, niin kääntäen jokainen muotoa $y = e^{bx}$ oleva funktio voidaan esittää myös muodossa $y = k^x$, missä $k = e^b$.

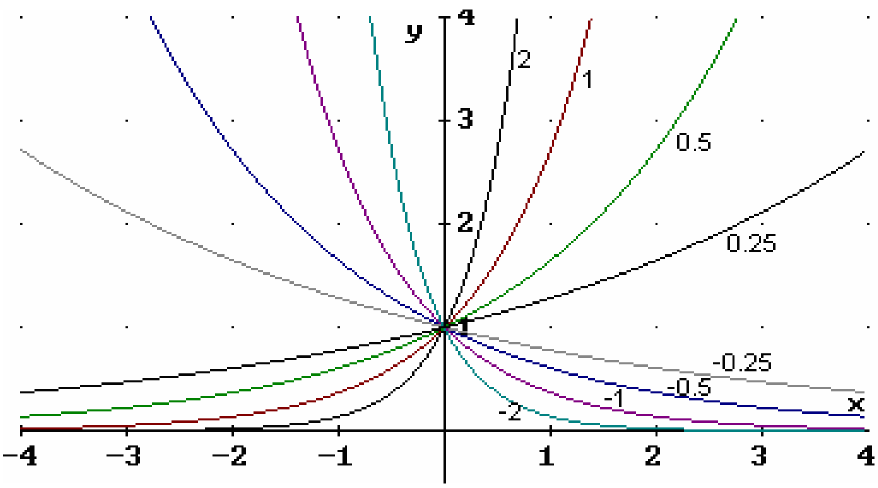
Koska

$$b > 0 \Leftrightarrow k = e^b > 1 \quad \text{ja} \quad b < 0 \Leftrightarrow 0 < (k = e^b) < 1,$$

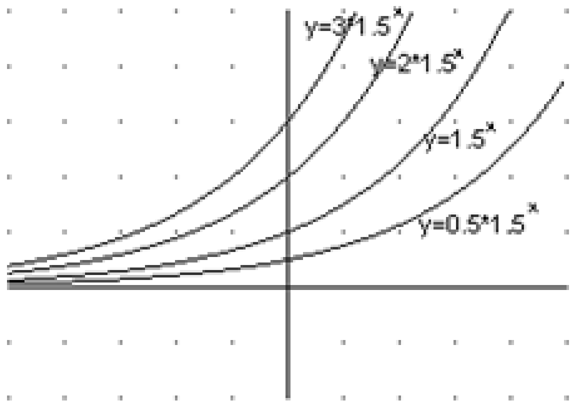
niin e-**kantaisten eksponenttifunktioiden** $y = e^{bx}$ **kuvaajille on ominaista:**

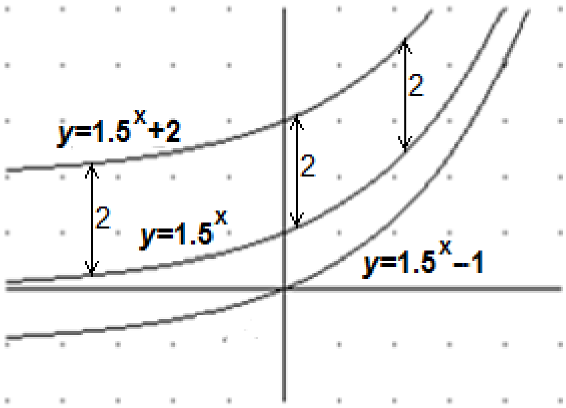
- Kuvaajat ovat samoja kuin funktioiden $y = k^x$ kuvaajat.
- Kuvaajat ovat nousevia, jos $b > 0$.
- Kuvaajat ovat laskevia, jos $b < 0$.
- Jos $x > 0$, niin kuvaaja on sitä ylempänä, mitä suurempi on eksponentin kerroin b.
- Kuvaajien suuruusjärjestys vaihtuu päinvastaiseksi kohdassa $x = 0$.

Viereiseen kuvaan on piirretty joukko eksponentti-funktioita $y = e^{bx}$. Kunkin kuvaajan viereen on merkitty vain kertoimen b arvo.



Usein tarkastellaan myös yleisempää muotoa $y = a \cdot k^x$ tai $y = k^x + c$ olevia funktioita, joita vastaa tietenkin sopivat e-kantaiset funktiot $y = a \cdot e^{bx}$ tai $y = e^{bx} + c$. Kerroin a venyttää alkuperäisen funktion $y = k^x$ kuvaajan etäisyyden x-akselista joka kohdassa pystysuunnassa a-kertaiseksi ja termi c nostaa (tai termin c merkistä riippuen laskee) kuvaajaa pystysuunnassa kaikkialla määrän c. Nämä vaikutukset ilmenevät alla olevista kuvista.





Harjoitustehtäviä

13.1 Hahmottele tuttujen potenssifunktioiden kuvaajien avulla parissa vaiheessa kuvat seuraavista funktioista käsin paperille. Tarkista laskimella.

$$y = x - 1 \qquad y = x^2 + 2 \qquad y = 0.2x^3 \qquad y = 3\sqrt{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x} - 1 \qquad y = \frac{1}{x} + 1 \qquad y = \frac{1}{x^2} - 1 \qquad y = \frac{0.5}{\sqrt{x}}$$

13.2 Laske eksponenttifunktioiden

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \quad y = 3^x \quad , \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \text{ja} \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

arvot kohdissa $x = -2, -1, 0, 1$ ja 2. Hahmottele sitten ko. eksponenttifunktioiden kuvaajat kiinnittäen huomiota käyrien peilikuvaominaisuuksiin, leikkauspisteeseen ja keskinäiseen suuruusjärjestykseen.

13.3 Piirrä ensin funktion $y = e^x$ tai $y = e^{-x}$ kuvaaja. Piirrä sitten sitä sopivasti venyttämällä tai siirtämällä kunkin kohdan funktiot omaan kuvaansa, kun $k = 0, \pm 1, \pm 2$. Tarkista piirtämällä samat kuvaajat laskimella.

a) $y = ke^x$ **b)** $y = ke^{-x}$ **c)** $y = e^x + k$

d) $y = e^{-x} + k$ **e)** $y = k - e^x$ **f)** $y = k - e^{-x}$

14. LOGARITMEISTA

14.1 Määritelmä ja perusominaisuudet

Määritelmä. Olkoon k positiivinen luku, $k \neq 1$. **Luvun *x* *k*-kantainen logaritmi** $\log_k x$ tarkoittaa lukua, johon k on korotettava, jotta saataisiin x, ts.

$$\boxed{k^{\log_k x} = x}$$

Esimerkki. $\log_5 25 = 2$, sillä $5^2 = 25$ $\qquad \log_3 81 = 4$, sillä $3^4 = 81$

$\log_4 81$ on lukujen 3 ja 4 välillä, sillä $4^3 = 64$ ja $4^4 = 256$

$\log_5 0.2 = -1$, sillä $5^{-1} = 0.2$ $\qquad \log_9 3 = 0.5$, sillä $9^{0.5} = \sqrt{9} = 3$

$\log_k k = 1$, sillä $k^1 = k$ $\qquad \log_k k^x = x$, sillä $k^x = k^x$

$\log_5 0$ ei ole määritelty, sillä luvun 5 kaikki potenssit ovat > 0

$\log_7(-3)$ ei ole määritelty, sillä luvun 7 kaikki potenssit ovat > 0

Tavallisimmin matematiikassa käytetään ns. **luonnollista logaritmia**, jossa kantalukuna on Neperin luku *e*. Luonnollisen logaritmin tunnuksena käytetään yleisesti merkintää ln tai joskus myös log.

Numeerisissa laskuissa käytetään ns. **Briggsin logaritmia**, jonka kantalukuna on kymmenjärjestelmän kantaluku 10. Briggsin logaritmin tunnuksena käytetään suomalaisessa kirjallisuudessa merkintää lg ja laskimissa merkintää log.

Tietyissä lukumäärätarkasteluissa käytetään joskus 2-kantaista logaritmia.

Muita logaritmijärjestelmiä ei käytännössä juurikaan esiinny.

Esimerkki. $\ln(e^x) = \log_e(e^x) = x$, sillä $e^x = e^x$

$\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$, sillä $10^2 = 100$.

Logaritmeille on voimassa mm seuraavat ominaisuudet:

- Logaritmin voi laskea vain positiivisesta luvusta.
- Ykkösen logaritmi on aina 0.
- Kantaluvun logaritmi on aina 1 ts. $\log_k k = 1$.
- Ykköstä suuremman luvun logaritmi on (käytännössä) positiivinen.
- Ykköstä pienemmän positiiviluvun logaritmi on (käytännössä) negatiivinen.

Kaksi viimeistä väitettä ovat voimassa vain, jos logaritmijärjestelmän kantaluku on ykköstä suurempi, kuten käytännössä yleensä aina onkin.

Huomautus. Jokainen positiiviluku *a* voidaan esittää Neperin luvun *e* potenssina muodossa

$$a = e^{\ln a} \quad ,$$

sillä määritelmän mukaan $\ln a$ tarkoittaa sitä lukua, johon logaritmijärjestelmän kantaluku *e* on korotettava, jotta saataisiin *a.*

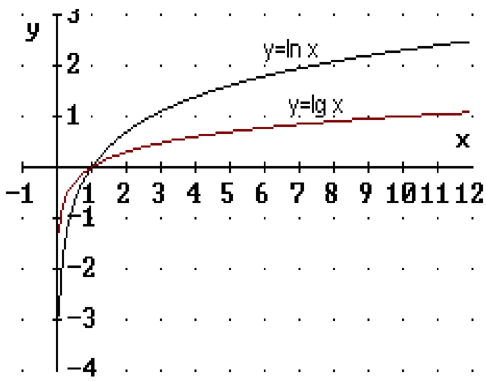
Esimerkki. Esitetään eksponenttifunktio $y = 4^x$ helpommin derivoitavan ja integroitavan *e*-kantaisen eksponenttifunktion avulla.

Lausutaan edellisen esimerkin mukaisesti luku 4 Neperin luvun *e* potenssina, jolloin saadaan

$$y = 4^x = (e^{\ln 4})^x \overset{\substack{\ln 4 \text{ laskettu} \\ \text{laskimella}}}{\approx} (e^{1.386})^x = e^{1.386x}$$

Tavallisten logaritmifunktioiden kuvaajat ovat seuraavanlaiset:

Logaritmifunktiot ovat määriteltyjä vain positiivisilla *x*:n arvoilla. Jos logaritmijärjestelmän kantaluku $k > 1$, niin logaritmifunktion kuvaaja nousee jyrkästi negatiivisen *y*-akselin viereltä, leikkaa *x*-akselia kohdassa $x = 1$ ja kaartuu sitten hitaaseen kasvuun.



14.2 Logaritmien laskulakeja

Lause. Jos *x* ja *y* ovat positiivisia ja *c* mielivaltainen reaaliluku, niin

$$\boxed{\begin{aligned} &\log_k(x \cdot y) = \log_k(x) + \log_k(y) \\ &\log_k\left(\frac{x}{y}\right) = \log_k(x) - \log_k(y) \\ &\log_k(x^c) = c \cdot \log_k(x) \end{aligned}}$$

Todistus. Koska $k^{\log_k(x)+\log_k(y)} = k^{\log_k(x)} \cdot k^{\log_k(y)} \overset{\substack{\text{logaritmin} \\ \text{määritelmän mukaan}}}{=} x \cdot y$,
niin edelleen logaritmin määritelmän mukaan $\log_k(x \cdot y) = \log_k(x) + \log_k(y)$.

Kaksi muuta kohtaa todistetaan vastaavasti.

Edellisen lauseen kohdat voidaan esittää sanallisesti muodossa:

Tulon logaritmi on tekijöiden logaritmien summa.
Osamäärän logaritmi on (osoittajan ja nimittäjän) logaritmien erotus.
Potenssin logaritmi on eksponentti kertaa kantaluvun logaritmi.

Huomautuksia:

- Edelliset kaavat koskevat vain tulolausekkeiden logaritmeja. **Summan ja erotuksen logaritmeille ei ole vastaavia kaavoja.**
- Edellisen lauseen kaavat esitetään useissa oppikirjoissa ilman sulkeita, mutta silloin ensimmäisessä ja kolmannessa kaavassa poiketaan sovituista laskujärjestyssäännöistä, sillä esimerkiksi merkintä $\log_k x^c$ pitäisi sopimuksen mukaan tulkita lausekkeeksi $(\log_k x)^c$, jota ei kuitenkaan oppikirjoissa tarkoiteta.

Esimerkki. Tiedetään, että $\lg 2 = 0.30103$. Tätä tietoa käyttäen voidaan laskea monien muidenkin lukujen logaritmeja:

$$\lg 4 = \lg(2^2) = 2 \cdot \lg 2 = 2 \cdot 0.30103 = 0.60206$$
$$\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0.30103 = 0.69897$$
$$\lg 8 = \lg(2^3) = 3 \cdot \lg 2 = 3 \cdot 0.30103 = 0.90309$$
$$\lg 20 = \lg(10 \cdot 2) = \lg 10 + \lg 2 = 1 + 0.30103 = 1.30103$$
$$\lg 25 = \lg \frac{100}{4} = \lg 100 - \lg(2^2) = 2 - 2 \cdot 0.30103 = 1.39794$$

Esimerkki. Esitä $\log_k x$ luonnollisen logaritmin avulla.

Ratkaisu. Määritelmän mukaan

$$k^{\log_k x} = x \quad \Big| \text{ otetaan yhtälön kummaltakin puolelta ln}$$
$$\ln(k^{\log_k x}) = \ln x \quad \Big| \text{ käytetään potenssin logaritmin laskusääntöä}$$
$$(\log_k x) \cdot (\ln k) = \ln x$$
$$\log_k x = \underline{\underline{\frac{\ln x}{\ln k}}}$$

Huomautus. Seuraavantyyppisellä komennolla

Define kkantlog(k,x)= ln(x) / ln(k)

voit määritellä laskimeesi funktion kkantlog, joka laskee k-kantaisen logaritmin luvusta x, jos laskimesi ei sitä muutoin pysty laskemaan. Tätä funktiota et kuitenkaan joitakin kotitehtäviämme lukuun ottamatta käytännössä tarvinne.

Esimerkki. Esitä 9876^{6789} muodossa $a\cdot 10^n$, missä $1<a<10$ ja n on sopiva kokonaisluku.

Merkitään $x = 9876^{6789}$, jolloin

$$\lg(x)=\lg(9876^{6789})=6789\cdot\lg(9876)=27119.21096.$$

Tästä saamme logaritmin määritelmän mukaan

$$x=10^{27119.21096}=10^{0.21096+27119}=10^{0.21090}\cdot 10^{27119}=\underline{\underline{1.6254\cdot 10^{27119}}}.$$

Kyseessä on selvästi kokonaisluku, joka alkaa numeromerkeillä 1625 … ja jossa on kaikkiaan 27119+1 = 27120 numeromerkkiä.

Esimerkki. Olkoot $x, y, z>0$. Sievennetään lauseke

$$\ln(x^2yz^3)+2\cdot\ln(\frac{x}{z})-3\ln(yz)$$

sekä hajottamalla että kokoamalla.

Hajotettaessa käytetään lauseen kaavoja vasemmalta oikealle:

$$\begin{aligned}&\ln(x^2\cdot y\cdot z^3)+2\cdot\ln(\frac{x}{z})-3\ln(yz)\\&=\ln(x^2)+\ln(y)+\ln(z^3)+2\big(\ln(x)-\ln(z)\big)-3\big(\ln(y)+\ln(z)\big)\\&=2\ln x+\ln y+3\ln z+2\ln x-2\ln z-3\ln y-3\ln z\\&=\underline{\underline{4\ln x-2\ln y-2\ln z}}\end{aligned}$$

Koottaessa käytetään samoja kaavoja oikealta vasemmalle:

$$\ln(x^2yz^3)+2\cdot\ln(\frac{x}{z})-3\ln(yz)=\ln(x^2yz^3)+\ln(\frac{x^2}{z^2})-\ln(y^3z^3)$$

$$=\ln(x^2yz^3\cdot\frac{x^2}{z^2})-\ln(y^3z^3)=\ln\left(\frac{x^2yz^3\cdot\frac{x^2}{z^2}}{y^3z^3}\right)=\underline{\underline{\ln\left(\frac{x^4}{y^2z^2}\right)}}.$$

Sinä et voi ehkä vaikuttaa siihen, hajottaako vai kokoaako symbolinen laskimesi logaritmilausekkeita. Laskimesi saattaa kuitenkin pystyä kokoamaan ja tai hajottamaan logaritmilausekkeita, mutta **muunnoksen suorittamiseksi on laskimelle kuitenkin vaikkapa with-operaattorilla ensin kerrottava muuttujien positiivisuus, joka on laskulakien soveltamisen edellytys.**

Huomautus. Hajotettaessa positiivisten tekijöiden *tulomuotoisen* lausekkeen logaritmia saadaan logaritmien summalauseke, missä kunkin tekijän logaritmi esiintyy niin monta kertaa kuin tekijän eksponentti osoittaa. Nimittäjässä olevan tekijän eksponentti on tulkittava negatiiviseksi.

Esimerkki. Jos muuttujat a, b, …, e ovat positiivisia, niin

$$\ln\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{c}}{d^3\cdot e}=2\cdot\ln a+\ln b+\frac{1}{2}\cdot\ln c-3\cdot\ln d-\ln e.$$

14.3 Eksponenttiyhtälöistä

Yhtälöä sanotaan eksponenttiyhtälöksi, jos tuntematon esiintyy eksponentissa. Esimerkiksi $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ on eksponenttiyhtälö, mutta $x^e + x^3 = \sqrt{1}$ ei ole, koska siinä tuntematon x ei esiinny eksponentissa.

Huomautus. Jos eksponenttiyhtälön molemmat puolet ovat tulotyyppiset (sisältäen vain kerto-, jako-, potenssiinkorotus- ja juurtamistoimituksia), niin usein yhtälö kannattaa ratkaista ottamalla logaritmi yhtälön kummastakin puolesta.

Tarkasteltavassa yhtälötyypissä saa yhteen- ja vähennyslaskua esiintyä vain eksponenteissa, jolloin kyseiset toimitukset palautuvat itse asiassa kerto- ja jakolaskuiksi kaavojen $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ja $a^{x-y} = a^x / a^y$ mukaisesti. Oleellista on, että kummankin puolen logaritmi voidaan hajottaa pieniksi logaritmilausekkeiksi, joissa tuntematon esiintyy vain logaritmien edessä olevissa kertoimissa.

Tehokkaan apuvälineen käyttö on tietenkin aina varmin ratkaisutapa.

Esimerkki. Ratkaise x yhtälöstä

$$2^x \cdot 3^{x+1} = \frac{5^x}{7^{2x-1}}$$
Molemmat puolet tulotyyppiset. Ota kummaltakin puolelta ln.

$$\ln\left(2^x \cdot 3^{x+1}\right) = \ln\left(\frac{5^x}{7^{2x-1}}\right)$$
Hajota tulolausekkeiden logaritmit.

$$x \cdot \ln 2 + (x+1) \cdot \ln 3 = x \cdot \ln 5 - (2x-1) \cdot \ln 7$$
Siirrä x:t kertoimineen vasemmalle, muut termit oikealle, ota x tekijäksi.

$$x \cdot (\ln 2 + \ln 3 - \ln 5 + 2\ln 7) = \ln 7 - \ln 3$$
Jaa x:n kertoimella.

$$x = \underbrace{\frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln 2 + \ln 3 - \ln 5 + 2\ln 7}}_{\text{Jo tästä muodosta voit laskea vastauksen likiarvon ja eiköhän tämä ole kaunein mahdollinen tarkka arvo?}} = \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 7^2}{5}\right)}}_{\text{Huomaa, että tätä logaritmien osamäärää ei voi lausua yhtenä luonnollisena logaritmina!}} \approx \underline{\underline{0.20797}}$$

Huomautus. Jos eksponenttiyhtälön molemmat puolet eivät ole tulotyyppiset, niin joskus voi hyödyntää sopivaa aputuntematonta.

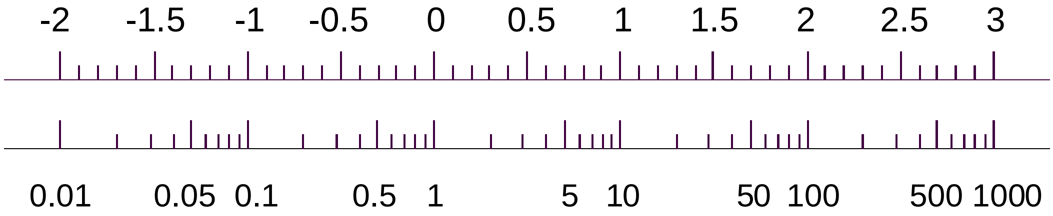
Esimerkki. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ | Merkitse $t = 2^x$, jolloin $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 1 \text{ tai } t = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^x = 1 \text{ tai } 2^x = 2$$
$$\underline{\underline{\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 1}}$$

14.4 Logaritminen asteikko

Logaritminen asteikko saadaan sijoittamalla luvut tasaväliselle eli lineaariselle asteikolle (10-kantaisen) logaritminsa määräämään kohtaan.
Koska esimerkiksi $\lg 1 = 0$ ja $\lg 100 = 2$, niin luku 1 sijoitetaan tasavälisen asteikon origon kohdalle ja luku 100 tasavälisen asteikon luvun 2 kohdalle.

Alkuperäinen tasavälinen asteikko



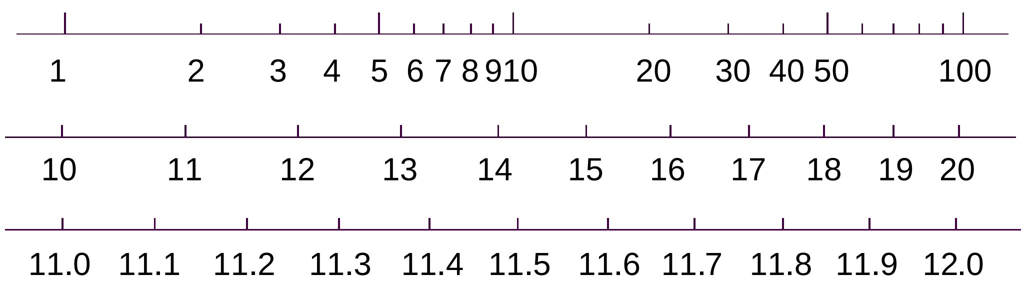
Uusi logaritminen asteikko

Koska $\lg(10^n) = n$, niin kympin kokonaispotenssit 10^n osuvat logaritmisella asteikolla aina alkuperäisen tasavälisen asteikon kokonaislukupisteisiin. Logaritmisella asteikolla kympin kokonaispotenssit sijaitsevat siis tasavälein.

Koska esimerkiksi $\lg 5 = 0.699$, niin logaritmisen asteikon luku 5 on samalla kohtaa kuin lineaarisen asteikon luku 0.699. Muut logaritmisen asteikon positiiviset luvut sijoitetaan paikoilleen samalla tavalla.

Koska negatiivisen luvun logaritmia ei ole määritelty, niin negatiivisia lukuja ei löydy logaritmiselta asteikolta. Lukua 0 ei myöskään löydy logaritmiselta asteikolta, joskin voimme kuvitella, että 0 on vasemmalla "äärettömän kaukana".

Seuraavassa kuvassa on logaritmisen asteikon välit $1 \ldots 100$, $10 \ldots 20$ ja $11 \ldots 12$ esitetty suuremmissa mittakaavoissa:

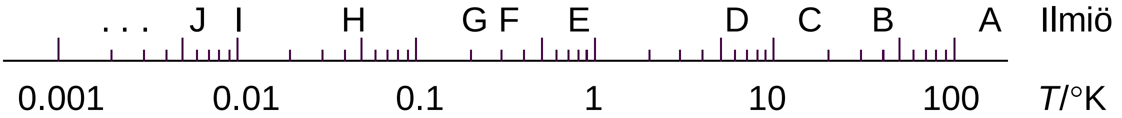


Kannattaa huomata, että luvut 1, 2, 3, …, 10 eivät sijaitse logaritmisella asteikolla tasavälein, vaan "tihenevät" lukujen kasvaessa. Samoin luvut 10, 20, 30, …, 100 "tihenevät" lukujen kasvaessa ja näiden lukujen välit ovat pareittain yhtä suuria kuin lukujen 1, 2, 3, …, 10 välit.

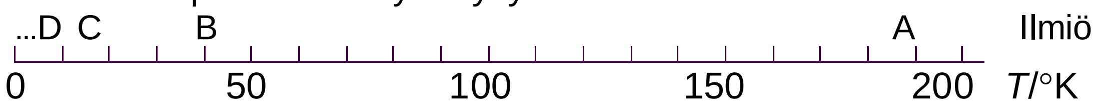
Myöskään luvut 10, 11,12, …, 20 eivät ole tasavälein, vaikkakin niiden välit ovat selvästi edellisiä tasaisemmat. Vaikka luvut 11.0, 11.1, 11.2, …, 12 eivät ole tasavälein, niin silmämääräisesti ei näiden lukujen tihenemistä pysty enää huomaamaan.

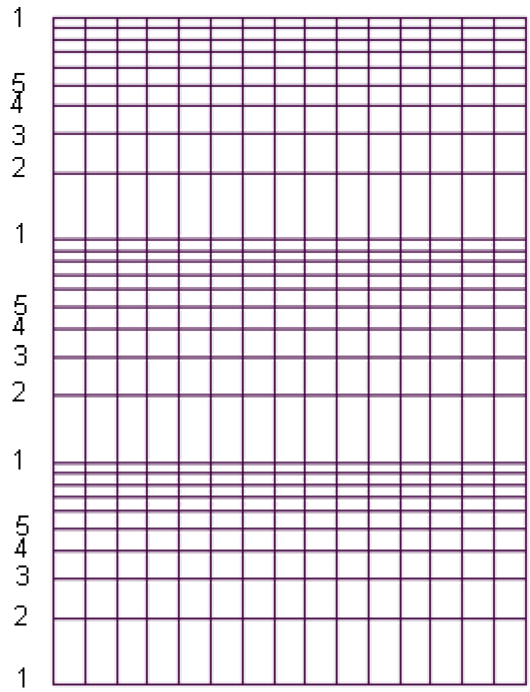
Huomautus. Logaritmista asteikkoa voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi sijoitettaessa asteikolle positiivisen arvon omaavia lukuja tai ilmiöitä, joita on tiheässä lähellä origoa ja harvassa kaukana origosta.

Esimerkki. Logaritminen asteikko on sovelias, jos esimerkiksi lämpötila-asteikolla halutaan esittää monia absoluuttisen nollapisteen läheisyyteen tiheimmin keskittyviä kylmäfysiikan (keksittyjä) ilmiöitä A, B, C, …



Lineaarinen asteikko ei ole näiden ilmiöiden kuvaamiseen sovelias, koska suurin osa ilmiöistä pakkautuisi hyvin lyhyelle välille:





Logaritmista asteikkoa käytetään hyväksi ns. **puolilogaritmi-** eli **lin-log-paperissa**, jossa toinen asteikko on lineaarinen ja toinen logaritminen. Viereinen kuva esittää yksinkertaistettua tyypillistä puolilogaritmipaperia.

Tasavälisellä asteikolla ei ole valmiina mitään numeroasteikkoa, kun taas logaritmisella asteikolla muutama jakso on varustettu luvuin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .

Kaupallisessa puolilogaritmipaperissa on logaritmisen asteikon välit 1-2 , …, 4-5 jaettu vielä kymmeneen pienempään osaan, kun taas loppupään lukuvälit 5-6 , … , 9-10 on jaettu vain viiteen osaan.

Puolilogaritmipaperin lineaarinen asteikko voidaan skaalata esittämään mitä tahansa väliä. Jos lineaarisen asteikon pituus on vaikkapa 15 cm ja valitaan esimerkiksi

- 1cm ≙ 1 yksikkö, niin lineaarisella asteikolla voidaan esittää väli -5…10 tai 0…15 tai 10…25 tai 50…65 tai …
- 1cm ≙ 5 yksikköä, niin lineaarisella asteikolla voidaan esittää väli -50…25 tai -10…65 tai 0…75 tai 100…175 tai …
- 1cm ≙ 100 yksikköä, niin lineaarisella asteikolla voidaan esittää väli -500…1000 tai 0…1500 tai 2000…3500 tai …
- 1cm ≙ 0.001 yksikköä, niin lineaarisella asteikolla voidaan esittää väli -0.005…0.01 tai 0 … 0.015 tai …

Puolilogaritmipaperin logaritmisella asteikolla on tietty määrä samanlaisia "jaksoja", joista kukin esittää yhtä dekadia eli lukuväliä kympin jostakin kokonaispotenssista kympin seuraavaan kokonaispotenssiin. Jos logaritminen asteikko on vaikkapa kolmen dekadin pituinen, niin tällä asteikolla voi esittää esimerkiksi seuraavat lukuvälit:

$$10^{-4} \dots 10^{-1} \quad \text{tai} \quad 10^{-2} \dots 10^{1} \quad \text{tai} \quad 10^{1} \dots 10^{4}.$$

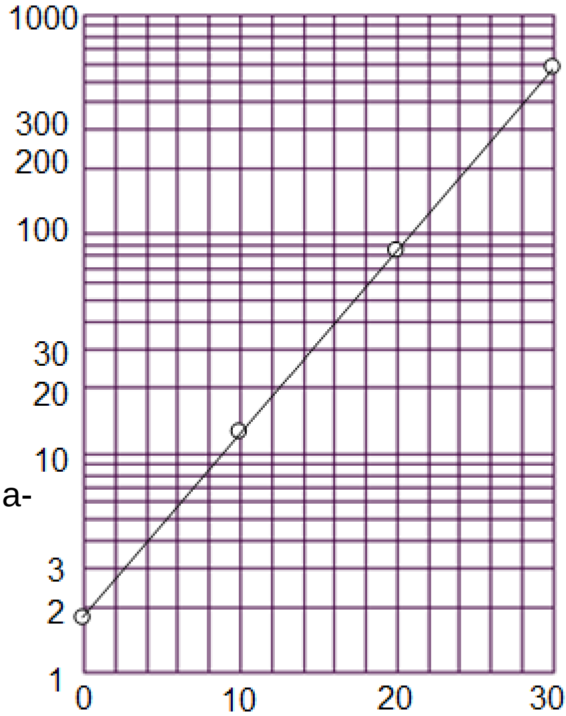
Neljän dekadin mittaista väliä kuten 1 … 10000 ei tälle paperille voi mitenkään tiivistää, vaan on käytettävä kahta toistensa jatkeeksi asetettua paperia.

Esimerkki. Piirrä puolilogaritmipaperille funktion $y = 1.9 \cdot 1.21^x$ kuvaaja välillä $0 \le x \le 30$.

Sijoitetaan funktion kuvaajan pisteet

x	$y = 1.9 \cdot 1.21^x$
0	1.9
10	12.8
20	86.0
30	579.

edellä tarkastellulle 3-dekadiselle puolilogaritmipaperille valitsemalla tasavälisellä asteikolla ruudun arvoksi kaksi yksikköä ja ajattelemalla, että logaritmisen asteikon syklit edustavat välejä 1-10, 10-100 ja 100-1000. Pisteiden kautta voidaan ilmeisesti piirtää suora viiva.



Yleisesti on voimassa seuraava tärkeä tulos:

Huomautus. Eksponenttifunktion $y = a \cdot k^x$ (tai $y = a \cdot e^{bx}$) kuvaaja on puolilogaritmipaperilla suora viiva, jos muuttuja x esitetään lineaarisella asteikolla ja muuttaja y logaritmisella asteikolla, sillä lauseke $\ln y$ sievenee muuttujan x lineaariseksi lausekkeeksi

$$\ln y = \ln(a \cdot k^x) = \ln a + x \cdot \ln k = \text{vakio} + \text{vakio} \cdot x.$$

Puolilogaritmipaperia voidaan myös käänteisesti käyttää sen selvittämiseen, onko jokin kasvu- tai kuolemisprosessi eksponentiaalinen. Sijoitetaan ilmiöön liittyvät (aika, määrä) -havainnot puolilogaritmipaperille ja katsotaan, ovatko ne ainakin likimain samalla suoralla viivalla. Jos havaintopisteet ovat samalla suoralla, niin kyseinen ilmiö kasvaa/vähenee eksponentiaalisesti (tarkemmin seuraavassa kappaleessa).

14.5. Lineaarinen ja eksponentiaalinen muuttuminen

Määritelmä. Jos suure y muuttuu lain $y = a \cdot t + b$ mukaisesti (a ja b vakioita), niin sanotaan, että y **muuttuu/kasvaa/vähenee lineaarisesti**.

Huomautus. Lineaarisesti muuttuvan suureen määrällinen (absoluuttinen) muutos on yhtä pitkinä aikaväleinä aina samansuuruinen.

Esimerkki. Jos lineaarisesti muuttuva suure vähenee jonakin 5 sekunnin mittaisena aikavälinä 3 yksikköä, niin sama suure vähenee jokaisena 5 sekunnin mittaisena aikavälinä 3 yksikköä. Niinpä sama suure vähenee jokaisena 10 sekunnin mittaisena aikavälinä kaksi kertaa 3 yksikköä eli yhteensä 6 yksikköä.

Määritelmä. Monet suureet luonnossa ja tekniikan sovelluksissa kasvavat tai vähenevät lain $y = a \cdot k^t$ eli $y = a \cdot e^{bt}$ mukaisesti (a, b ja k vakioita), jolloin sanotaan, että suure y **muuttuu/kasvaa/vähenee eksponentiaalisesti**.

Huomautus. Eksponentiaalisesti muuttuvan suureen prosentuaalinen (suhteellinen) muutos on yhtä pitkinä aikaväleinä aina samansuuruinen.

Esimerkki. Jos eksponentiaalisesti kasvava suure kaksinkertaistuu ajassa t_2, niin tämä suure nelinkertaistuu ajassa $2 \cdot t_2$ ja kahdeksankertaistuu ajassa $3 \cdot t_2$.

Jos jokin toinen, eksponentiaalisesti vähenevä suure pienenee kolmasosaan ajassa $t_{1/3}$, niin tämä suure pienenee 1/27-osaan ajassa $3 \cdot t_{1/3}$.

Esimerkki. Oletetaan, että bakteerien määrä $n = n(t)$ kasvaa eksponentiaalisesti. Määritä $n(12\text{ h})$, kun tiedetään, että $n(6\text{ h}) = 320$ ja $n(8\text{ h}) = 1280$.

Ratkaisu 1. Lähtötiedoista näemme, että lukumäärä nelinkertaistuu kahdessa tunnissa, joten määrä nelinkertaistuu kaksi kertaa neljässä tunnissa ja siis $n(12\text{ h}) = 4^2 \cdot n(8\text{ h}) = 16 \cdot 1280 = 20480 \approx 20500$.

Ratkaisu 2. TI-Nspire CX CAS -laskimen komennolla ExpReg {6,8},{320,1280} saamme lähtötietoihin sopivan eksponenttifunktion $\text{stat.RegEqn}(t) = 5 \cdot 2^t$.
Kysytty lukumäärä on siis $n(12) = \text{stat.RegEqn}(12) = 5 \cdot 2^{12} = 20480 \approx 20500$.
Katso tarkemmin kohdan 11.1 viimeisestä huomautuksesta.

Huomautus. Eksponentiaalisesti kasvava suure y voidaan esittää muodoissa

$$y = y_0 \cdot k^t \text{ , missä } k > 1$$
$$y = y_0 \cdot e^{bt} \text{ , missä } b > 0$$
$$y = y_0 \cdot 2^{t/t_2} \text{ , missä } t_2 = \text{tuplaantumisaika} .$$

Eksponentiaalisesti vähenevä suure y voidaan puolestaan esittää muodoissa

$$y = y_0 \cdot k^t \text{ , missä } 0 < k < 1$$
$$y = y_0 \cdot e^{bt} \text{ , missä } b < 0 \qquad \left(\text{eli} \quad y = y_0 \cdot e^{-bt} \text{ , missä } b > 0\right)$$
$$y = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}} \text{ , missä } t_{1/2} = \text{puoliintumisaika} .$$

Em. kaavoissa y_0 on suureen y arvo hetkellä, josta alkaen aikaa t mitataan.

Esimerkki. Seuraavassa on esimerkkejä joistakin eksponentiaalisesti kasvavista tai vähenevistä suureista:

1. Jos talletukselle maksetaan vuotuista korkoa p % "korkoa korolle"-periaatetta noudattaen, niin alkupääomaltaan K_0:n suuruinen talletus on t vuoden kuluttua
$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t .$$

2. Suotuisissa olosuhteissa bakteeriviljelmän bakteerien lukumäärän kaksinkertaistumiseen kuluu vakio aika t_2. Mikäli bakteerien lukumäärä hetkellä $t = 0$ on n_0, niin lukumäärä hetkellä t on
$$n = n_0 \cdot 2^{t/t_2} .$$
Lukumäärän voi esittää myös muodoissa
$$n = n_0 \cdot k^t \text{ , } k > 1,$$
ja
$$n = n_0 \cdot e^{bt} \text{ , } b > 0 .$$

3. Mikäli radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on $t_{1/2}$, niin hetkellä $t = 0$ olleesta radioaktiivisen aineen määrästä m_0 on hetkellä t jäljellä määrä
$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}} .$$
Jäljellä olevan massan voi esittää myös muodoissa
$$m = m_0 \cdot k^t \text{ , } \quad 0 < k < 1,$$
$$m = m_0 \cdot e^{bt} \text{ , } b < 0 ,$$
$$m = m_0 \cdot e^{-bt} \text{ , } b > 0 .$$

4. Mikäli kappale, jonka alkulämpötila on T_0, tuodaan hetkellä $t = 0$ ympäristöön, jonka lämpötila on koko ajan vakio T_{ymp}, niin Newtonin jäähtymislain mukaan kappaleen ja ympäristön välinen lämpötila***ero*** vähenee eksponentiaalisesti. Lämpötilaero hetkellä t on

$$T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot e^{-bt},$$

missä b on olosuhteista riippuva positiivinen vakio (yksikkönä esimerkiksi 1/h). Vakio b on pieni, mikäli lämpötilan tasaantuminen on hidasta (kappale on hyvin eristetty, kappaleen pinta-ala on pieni, ei ole lämpötilaa tasoittavia ilmavirtauksia). Vakion b arvo on puolestaan suuri, jos lämpötilan tasaantuminen on nopeaa (kappale on eristämätön, kappaleen pinta-ala on suuri, voimakkaat ilmavirtaukset).

Edellinen kaava voidaan esittää myös muodossa

$$T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot k^t,$$

missä $k = e^{-b}$ on välillä $0 < k < 1$ oleva vakio. Mikäli lämpötilan tasoittuminen on hidasta, niin k on lähellä ykköstä, päinvastaisessa tapauksessa k on taas lähellä nollaa. Kaava voidaan esittää lämpötilaeron puoliintumisaikaa $t_{1/2}$ käyttäen myös muodossa

$$T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}.$$

Esimerkki. Termospulloon, jonka lämpötila oli 98 °C, kaadettiin saman lämpöistä kahvia. Tunnin kuluttua kahvin lämpötila oli laskenut määrällä 10 °C. Mikä on lämpötila 4 tunnin kuluttua termospullon täyttämisestä, jos ympäristön lämpötila on koko ajan 18 °C ja olosuhteet ovat jäähtymislain mukaiset?

Suoritaan laskut ilman yksiköitä °C ja h.

Tapa 1. Sijoitetaan hetkellä $t = 1$ tunnetut arvot edellisen esimerkin kohdan 4 ensimmäiseen kaavaan

$$T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot e^{-bt},$$

jolloin

$$\begin{aligned} 88 - 18 &= (98 - 18) \cdot e^{-b \cdot 1} \\ 70 &= 80 \cdot e^{-b} \quad \Big| \cdot \frac{e^b}{70} \\ e^b &= \frac{8}{7} \\ b &= \ln\frac{8}{7} \end{aligned}$$

Lämpötilalle käytetystä kaavasta saadaan hetkellä $t = 4$

$$T = T_{ymp} + (T_0 - T_{ymp}) \cdot e^{-bt} = 18 + (98 - 18) \cdot e^{-\ln(8/7) \cdot 4} = \underline{\underline{64.9\ ^\circ\text{C}}}$$

Tapa 2. Sijoitetaan hetkellä $t = 1$ tunnetut arvot kohdan 4 keskimmäiseen kaavaan $T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot k^t$, jolloin

$$88 - 18 = (98 - 18) \cdot k^1.$$

Tästä saadaan $k = 0.875$. Samasta kaavasta saadaan hetkellä $t = 4$ lämpötila

$$T = T_{ymp} + (T_0 - T_{ymp}) \cdot k^t = 18 + (98 - 18) \cdot 0.875^4 \approx \underline{\underline{64.9°C}}$$

Tapa 3. Sijoitetaan hetkellä $t = 1$ tunnetut arvot kohdan 4 alimpaan kaavaan $T - T_{ymp} = (T_0 - T_{ymp}) \cdot (1/2)^{t/t_{1/2}}$, jolloin

$$88 - 18 = (98 - 18) \cdot (1/2)^{1/t_{1/2}}$$

$$70 = 80 \cdot (1/2)^{1/t_{1/2}} \qquad \Big| \ln$$

$$\ln 70 = \ln 80 + \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \ln(1/2)$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln 70 - \ln 80} \approx 5.19$$

ja lopulta $T = T_{ymp} + (T_0 - T_{ymp}) \cdot (1/2)^{t/t_{1/2}} = 18 + (98 - 18) \cdot (1/2)^{4/5.19} \approx \underline{\underline{64.9\ °C}}$

Tavoissa 1 - 3 kannattaa yhtälöt käytännössä ratkaista laskimella.

Tapa 4. Tässä tehtävässä kahvin ja ympäristön lämpötila***ero*** on eksponentiaalisesti vähenevä suure. Tällaiselle suureelle on ominaista, että sen kulloisestakin arvosta tietyssä ajassa häviää aina prosentuaalisesti yhtä paljon. Koska lämpötilaerosta hävisi tunnin kuluessa $\frac{10°C}{98°C - 18°C} \cdot 100\% = 12.5\%$, niin jokaisen seuraavankin tunnin aikana jäljellä olevasta lämpötilaerosta häviää aina 12.5% . Lämpötilaero on siis 4 tunnin kuluttua $0.875^4 \cdot (98 - 18)°C = 46.9°C$. Tällöin kahvin lämpötila on $(18 + 46.9)°C = \underline{\underline{64.9°C}}$.

Tapa 5. Tehtävän voi ratkaista myös piirtämällä puolilogaritmipaperille lämpötilaeroa esittävän kuvaajasuoran kahden tunnetun pisteen kautta.

Tapa 6. Asetetaan tunnettujen (aika, lämpötila*ero*) - pisteiden (0,80) ja (1,70) kautta eksponenttifunktio laskimen regressiotoimintoa käyttäen komennolla

ExpReg {0,1},{80,70}.

Tämän jälkeen syötteellä stat.results tai stat.RegEqn(t) laskin näyttää lämpötilaeron yleiseksi lausekkeeksi $80 \cdot 0.875^t$. Kahvin lämpötila hetkellä $t = 4$ on näin ollen $T(4) = 18 + 80 \cdot 0.875^4 = 64.9°C$.

Laskimeen määräytynyttä funktiota voi käyttää myös syötteessä seuraavasti

$18 +$ stat.RegEqn(4) ↵ 64.9

Harjoitustehtäviä

14.1 Määritä ilman laskinta seuraavat logaritmit. Perustele vastauksesi! Jos sopivaa kokonais- tai murtolukuvastausta ei ole, niin ilmoita kokonaislukuväli, jolla logaritmin arvo on. Tarkista tuloksesi käyttäen vaikkapa laskimeen määrittelemääsi funktiota kkantlog(*k*,*x*).

$\log_2 16$	$\log_5 125$	$\log_3 9$	$\log_9 3$	$\log_5 1$	$\log_7 \frac{1}{7}$
$\lg 0.001$	$\log_2 \frac{1}{4}$	$\log_4 64$	$\log_2 0$	$\log_2 0.5$	$\lg 1000$
$\log_5 \sqrt[4]{5}$	$\log_k (k^3)$	$\log_6 \sqrt{6}$	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\ln(e^5)$	$\log_4(-4)$
$\lg \frac{1}{\sqrt{10}}$	$\log_{100} 10$	$\log_2 1$	$\lg 75$	$\ln 6$	$\log_{\sqrt{2}} 8$

14.2 Piirrä samaan kuvaan ensin edeltä tuttu käyrä $y = \ln x$ ja sitten sitä sopivasti skaalaten tai siirtäen käyrät $y = 2\ln x$, $y = \ln x - 1$ ja $y = \ln(x-1)$.

14.3 Tiedetään, että $\lg 2 \approx 0.30$ ja $\lg 3 \approx 0.48$. Laske ilman laskinta lukujen 8, 5, 6, 18, 27, 20, 300, 1/3, 1/4 ja 200/9 kymmenkantaiset logaritmit.

14.4 Olkoon $x = 5555^{6666}$ ja $y = 6666^{5555}$. Laske laskinta hyödyntäen muotoa $a \cdot 10^n$ (n on kokonaisluku ja $1 \le a < 10$) olevat likiarvot lausekkeille

v1) $x \cdot y$ **v2)** $x + y$ **a)** $\dfrac{x}{y}$ **b)** $x - y$

14.5 Esitä lausekkeen $\dfrac{567^{567} \cdot 890^{890}}{1234^{1234}}$ likiarvo muodossa $a \cdot 10^n$.

14.6 Ratkaise seuraavat yhtälöt ilman laskimen solve-toimintoa. Tarkista tuloksesi solve-toiminnolla.

a) $23^x \cdot 32^{2x+1} = 75$ **b)** $4 \cdot 2^{4x} - 5 \cdot 2^{2x} + 1 = 0$

c) $12 \cdot 34^{2x+1} = \dfrac{45 \cdot 67^{3x+1}}{89^{4x+1}}$ **d)** $3 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 2 = 0$

14.7 Olkoot $a, b > 0$. Sievennä käsin laskien (i) kokoamalla (ii) hajottamalla (iii) laskimella kokeillen (muista kertoa laskimelle muuttujien positiivisuus)

v) $\ln(\dfrac{2a^3}{3b^2}) - 2\ln(a^2\sqrt{b}) + \ln(a+b)$ **a)** $\ln\dfrac{5(a+b)^2 a}{b^2} - 2\ln\dfrac{a\sqrt{b}}{a+b} + 3\ln(ab^2)$

14.8 Määritä logaritmisella asteikolla esitettyjen lukujen
v1) 1 ja 1000 **v2)** 2 ja 500
a) 100 ja 10^6 **b)** 1 ja 3 **c)** 5 ja 3000
välimatka, jos lukujen 1 ja 10 välinen etäisyys ko. asteikolla on 25 mm.

14.9 Piirrä osa sellaista logaritmista asteikkoa, jossa lukujen 1 ja 10 välinen etäisyys on 10 mm. Merkitse asteikolle mahdollisimman monta luvuista 0.1, 1, 10, 100, 1000, 10^6 , 0.0001, 0.5, 2, 20, 200, 0.005, 0, -1, -10, -4.

14.10 Ratkaise puolilogaritmipaperia käyttäen yhtälöpari $\begin{cases} y = 8000 \cdot 3^{-0.02x} \\ y = 25 \cdot 2^{0.03x} \end{cases}$ piirtämällä kuvaajat välillä $0 \le x \le 250$.Tarkista tuloksesi laskimella!

14.11 Piirrä puolilogaritmipaperiin funktioiden $y = \ln x$ ja $y = \lg x$ kuvaajat välillä $0.1 \le x \le 100$. Miten paperi kannattaa asettaa?

14.12 Tiedetään, että radioaktiivisen aineen jäljellä oleva määrä vähenee eksponentiaalisesti. Määritä radioaktiivisen aineen puoliintumisaika, kun aktiivista ainetta oli alun perin 124 g ja 20 vrk myöhemmin 31 g. Paljonko ainetta on jäljellä, kun aikaa kuluu lisää 30 vrk?
Ratkaise tehtävä monella eri tavalla siten, että käytät:

(i) jotakin yhtälöistä $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$, $m = m_0 \cdot k^t$, $m = m_0 \cdot e^{bt}$, $m = m_0 \cdot e^{-bt}$.
(ii) puolilogaritmipaperia
(iii) laskimen expReg-toimintoa
(iv) tietoa, jonka mukaan eksponentiaalisesti muuttuvan suureen suhteellinen muutos on yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä suuri.

14.13 Tiedetään, että talletuksen arvo kasvaa eksponentiaalisesti, mikäli korko on vakio. (Tämä tulos pitää käytännössä paikkansa vain tasavuosien kohdalla, koska korko liitetään pääomaan tavallisesti vain kerran vuodessa. Mikäli korkoa liitettäisiin pääomaan jatkuvasti, niin tulos olisi voimassa kaikilla *t*:n arvoilla.) Oletetaan, että pääoma kaksinkertaistuu täsmälleen **v)** 7 **a)** 4 vuodessa.
(i) Määritä vuotuinen korkoprosentti.
(ii) Mikä on 1000 euron talletuksen arvo 55 vuoden kuluttua?

14.14 Tiedetään, että radioaktiivisen aineen aktiivisuus $A = A(t)$ vähenee eksponentiaalisesti. Mikä on ollut tietyn radioaktiivisen näytteen aktiivisuus vuonna 1950, jos kyseisen näytteen aktiivisuus vuonna 2000 oli 125000 yksikköä ja viisi vuotta myöhemmin 115000 yksikköä?
Suorita tehtävä laskimen ExpReg-toiminnolla mitaten aikaa
a) ajanlaskun alusta **b)** vuodesta 1950 **c)** vuodesta 2000 alkaen.

14.15 Termospulloon, jonka lämpötila oli $94.0\,°\mathrm{C}$, kaadettiin saman lämpöistä kahvia. Kolmen tunnin kuluttua kahvin lämpötila oli laskenut **v)** 8 **a)** 11 astetta. Mikä on lämpötila 13 tunnin kuluttua termospullon täyttämisestä, jos ympäristön lämpötila on koko ajan $24.0\,°\mathrm{C}$ ja olosuhteet ovat jäähtymislain mukaiset? Ratkaise tehtävä
(i) laskimen ExpReg-toiminnolla (ii) ilman laskimen ExpReg-toimintoa

14.16 Suure $z = z(t)$ muuttuu (i) eksponentiaalisesti (ii) lineaarisesti.
Päättele $z(50)$ mahdollisimman yksinkertaisesti, kun tiedetään, että
v) $z(10) = 15$ ja $z(20) = 30$ **a)** $z(35) = 2000$ ja $z(40) = 1500$.

15. LUKUJONOISTA JA SUMMISTA

15.1 Yleistä

Lukujono muodostuu peräkkäin olevista luvuista. Lukujono voidaan antaa esimerkiksi luettelemalla lukujonon kaikki jäsenet tai niin monta jäsentä, että lukijalle muodostuu selvä mielikuva jonon kaikista jäsenistä.

Esimerkki. Jonot 3, 7, -2, 5 ja 2, 4, 6, …, 20 ovat **päättyviä**, kun taas jono 1, -3, 5, -7, 9, -11, … on **päättymätön**.

Lukujono voidaan antaa myös esittämällä sääntö yleisen jäsenen laskemiseksi.

Esimerkki. Edellisen esimerkin viimeiset jonot voidaan antaa muodossa

$$u_n = 2n\ ,\ n = 1, 2, ..., 10 \qquad \text{ja} \qquad u_n = (-1)^{n+1}(2n-1)\ ,\ n = 1, 2, 3, ...$$

Lukujono voidaan määritellä myös **rekursiivisesti** eli käyttäen **palautuskaavaa**. Tällöin on annettava jonon ensimmäisen (tai ehkä muutaman ensimmäisen) jäsenen arvo ja sääntö, miten jonon jäsen riippuu edellisistä jäsenistä.

Esimerkki. Määrittelystä

$$u_1 = 2\ ,\ u_n = 2u_{n-1} + 1\ \ (n = 2, 3, ..., 6)$$

saadaan päättyvä lukujono 2, 5, 11, 23, 47, 95 .

Monissa yhteyksissä viitataan Fibonaccin lukujonoon $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, joka voidaan määritellä rekursiivisesti kaavoilla

$$u_1 = 1\ ,\ u_2 = 1\ ,\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}\ ,\ n = 3, 4, 5, \dots$$

Päättyvän lukujonon jäsenten summaa voidaan merkitä Σ-merkintää käyttäen, jos yleisen jäsenen lauseke tunnetaan.

Esimerkki. $\sum_{n=1}^{3} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $\sum_{k=3}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$.

Esimerkin Σ-lausekkeet voinet kirjoittaa symboliseen laskimeen joko ”kaksiulotteisessa” muodossa $\sum_{n=1}^{3}(n^2)$ ja $\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{k}\right)$ sopivaa lausekemallia hyödyntäen tai yhdelle riville muokattuina lausekkeina $\Sigma\,(n\text{^}2,\ n,\ 1,\ 3)$ ja $\Sigma(1/k,\ k,\ 3,\ 6)$.

Huomautus. Summausindeksinä käytetyllä kirjaimella ei ole merkitystä summan arvoon, vaikkakin indekseinä käytetään tavallisesti kirjaimia *i*, *j*, *k*, *l*, *m* ja *n*.

Huomautus. Monissa (tämän vuoden 2016) **laskimissa summausindeksi kasvaa alarajalta ylärajalle yhden välein**, mutta käytännössä on monia tilanteita, joissa summausindeksi kasvaa tietyin askelvälein vaikkapa alarajalta 67 ylärajalle 92 ”steppinä” 5, jolloin indeksi käy läpi arvot 67, 72, 77, 82, 87 ja 92.

Esimerkki. Tarkastelemme ensin summan $x^{67}+x^{72}+x^{77}+x^{82}+x^{87}+x^{92}$ erästä *varsin tavallista väärää esitysyritystä* lausekkeella

$$\sum_{k=67}^{92} x^{k+5}$$

missä on ajateltu merkinnän $k+5$ kasvattavan indeksiä aina viidellä. Tutki yrityksen kelvollisuutta sijoittamalla termiin muuttujan *k* paikalle vuorollaan kaikki indeksin *k* arvot alarajalta 67 ylärajalle 92, jolloin saat *väärän summan*

$$x^{67+5}+x^{68+5}+x^{69+5}+x^{70+5}+\ldots+x^{91+5}+x^{92+5}.$$

Tarkasteltava summa on muokattava nykyiseen TI-laskimeen vaikka muotoon

$$x^{67+\underline{0}\cdot 5}+x^{67+\underline{1}\cdot 5}+x^{67+\underline{2}\cdot 5}+x^{67+\underline{3}\cdot 5}+x^{67+\underline{4}\cdot 5}+x^{67+\underline{5}\cdot 5}=\sum_{k=0}^{5} x^{67+\underline{k}\cdot 5},$$

missä muuttuja *k* ja sen arvot on selvyyden vuoksi alleviivattu.
Tulevissa TI-laskimissa syöttö onnistunee myös seuraavanlaisesti

$$\sum_{k=67}^{92\text{ "steppinä" }5} x^k \quad\text{tai}\quad \sum(\underbrace{x^k}_{\substack{\text{termin}\\ \text{lauseke}}},\underbrace{k}_{\substack{\text{summaus-}\\ \text{indeksi}}},\underbrace{67,92}_{\substack{\text{summausindeksin}\\ \text{ala- ja yläraja}}},\underbrace{5}_{\substack{\text{summausindeksin}\\ \text{steppi}}}).$$

Seuraavalla komennolla voit nykyiseenkin TI-Nspire CX CAS -laskimeen määritellä funktion **steppisumma**, joka sopii summalausekkeen laskemiseen, kun steppinä on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku.

$$\text{Define }\textbf{steppisumma}(\underbrace{terminlauseke,indeksi,alaraja,ylaraja,steppi}_{\text{Määrittelyssäsi voit käyttää lyhyempiäkin tunnuksia kuten } t,\ i,\ a,\ y,\ s})=$$

$$\sum_{indeksi=alaraja}^{ylaraja}(\text{ifFn}(\underbrace{\text{remain}(indeksi-alaraja,steppi)}_{\text{jakolaskun } \frac{indeksi-alaraja}{steppi} \text{ jakojäännös}})=0,\underbrace{terminlauseke}_{\substack{\text{Tämä termi huo-}\\ \text{mioidaan summassa,}\\ \text{jos jakojäännös=0}}},\underbrace{0}_{\substack{\text{Muu-}\\ \text{toin}\\ \text{tämä}}}))$$

Esimerkki. Seuraava komento tulostaa muuttujan *x* potensseista kymmenen välein muodostuvan summan $x^{37}+x^{47}+x^{57}+\ldots+x^{347}$ kaikki 32 termiä:

$$\text{steppisumma}(x^k,k,37,347,10) \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad x^{37}+x^{47}+\ldots+x^{347}$$

Ylärajan paikalla voi olla mikä tahansa luku puoliavoimelta väliltä $[347,357)$.

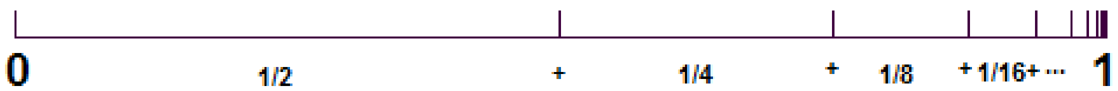
15.2 Sarjoista

Päättymättömän lukujonon kaikkien äärettömän monen jäsenen muodollista ”summaa” $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ sanotaan **sarjaksi.**
Jos kyseinen ”summa” on äärellisenä olemassa, niin sarjaa sanotaan **suppenevaksi**, vastakohtana on **hajaantuva** sarja.

Esimerkki. Kuvan avulla on helppo uskoa, että seuraava sarja suppenee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 1$$

ja sen summa todella on 1. Tarkastellaan lukusuoran väliä $[0,1]$, jossa lasketaan yhteen annetun sarjan termien mittaisia janoja:



Koska aina uuden termin lisääminen sarjan alkupään aiempaan summaan kasvattaa alkupään summan sen aiemman arvon ja ykkösen puoliväliin, mutta ei milloinkaan yli ykkösen, niin alkupään summa lähenee ykköstä termien määrän kasvaessa rajatta. Tarkasteltu sarja siis suppenee ja sen summa on 1.

Esimerkki. Seuraavat sarjat hajaantuvat selvästi ”kohti ääretöntä”:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots = \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty \, .$$

Huomautus. Sarja voi hajaantua myös siten, että sarjan alkupäästä muodostetut osasummat ”heilahtelevat” vakiintumatta mitään kiinteää arvoa kohden.

Esimerkki. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \ldots$ hajaantuu ”heilahdellen”, koska sarjasta muodostetut yhden, kahden, kolmen, … alkupään termin osasummat 1, 0, 1, 0, 1, 0, … eivät vakiinnu kohden mitään kiinteää arvoa.

Huomautus. Edellisten esimerkkien sarjoja voi tutkia myös laskimella laittamalla ylärajaksi symbolin ∞. Laskin ei kuitenkaan hallitse sarjoja kovin hyvin, sillä sellaisessakin tapauksessa, jossa laskin tulostaa lopputuloksena syötetyn sarjan sellaisenaan (tai mahdollisesti vain vähän muokattuna), voi olla kyseessä olla jopa hyvinkin yleisesti tunnettu suppeneva tai hajaantuva sarja.

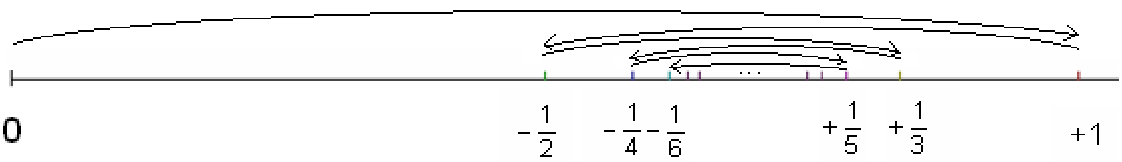
Esimerkki. Termejä ryhmittelemällä ja arvioimalla voidaan todeta, että myös ns. harmoninen sarja hajaantuu ”kohden ääretöntä”:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\substack{\text{2 termiä, jotka}\\ \text{ovat} \geq \frac{1}{4}}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{\substack{\text{4 termiä, jotka}\\ \text{kaikki ovat} \geq \frac{1}{8}}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{\substack{\text{8 termiä, jotka}\\ \text{kaikki ovat} \geq \frac{1}{16}}}+\ldots$$

$$\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty$$

Huomaa, että vaikka harmonisen sarjan termit lopulta ovat ”äärettömän pieniä”, niin kaikkien näiden termien summa on kuitenkin äärettömän suuri.

Esimerkki. Seuraavan kuvan avulla tuntuu uskottavalta, että vuorotteleva harmoninen sarja $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ suppenee kohden arvoa, joka on likimain 0.69 , koska vastakkaissuuntaiset ”hypyt” jatkuvasti pienenevät ja lähestyvät lopulta pituudeltaan nollaa.



15.3 Aritmeettinen jono

Määritelmä. Lukujonoa sanotaan **aritmeettiseksi**, jos aina kahden perättäisen jäsenen erotus $u_n-u_{n-1}=d=\text{vakio}=\text{ns. differenssi}$.

Esimerkki. Jono $2, 4, 6, 8, \ldots$ on päättymätön aritmeettinen jono differenssinä 2.

Jono 5, 2, -1, -4 on päättyvä aritmeettinen jono differenssinä $d=-3$.

Myös jono 5, 5, 5, 5 on aritmeettinen differenssin ollessa 0.

Sen sijaan jono 1, 2, 4, 7, 11 ei ole aritmeettinen, koska perättäisten jäsenten erotukset ovat erisuuria lukuja 1, 2, 3 ja 4 .

Lause. Tarkastellaan aritmeettista jonoa, jonka ensimmäinen jäsen on u_1 ja differenssi *d*. Tämän jonon *n.* jäsen

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}\,.$$

Saman aritmeettisen jonon *n* ensimmäisen jäsenen summa

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}}\,.$$

ts. päättyvän aritmeettisen jonon jäsenten summa =
jäsenten määrä kertaa ensimmäisen ja viimeisen jäsenen keskiarvo.

Todistetaan edellisen lauseen mukaisen jonon summakaava kirjoittamalla jonon jäsenet sekä etu- että takaperin ja laskemalla esitykset yhteen:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + \ldots + (u_1 + (n-1)d) \\ S_n &= u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + \ldots + (u_n - (n-1)d) \\ \hline 2S_n &= (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \ldots + (u_1 + u_n) \quad \Big| :2 \\ S_n &= n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \end{aligned}$$

Huomaa, että *n*. jäsenen kaavassa differenssin *d* kerroin on $n-1$ eikä *n*. Vertaa: Jos juokset tolpparivin ensimmäiseltä tolpalta *n*:nnelle tolpalle, niin sinun on juostava $n-1$ väliä.

Esimerkki. Laske välillä 1000 … 2000 olevien seitsemällä jaollisten lukujen summa käyttäen laskintasi vain yksinkertaisena nelilaskimena.

Ratkaisu. Koska $1000 / 7 = 142.9$ ja $2000/7 = 285.7$, niin ensimmäinen kyseisistä luvuista on $143 \cdot 7 = 1001$ ja viimeinen $285 \cdot 7 = 1995$.
Kyseisiä lukuja on siis yhteensä $285 - 143 + 1 = 143$ kappaletta. (Huomaa jälleen, että lukuja on yksi enemmän kuin niiden välejä!)

Koska luvut 1001, 1008, 1015, … , 1995 muodostavat aritmeettisen jonon, niin edellisen lauseen mukaan lukujen summa on $143 \cdot \frac{1001 + 1995}{2} = 214214$.

Huomautus. Aritmeettisen jonon summakaavaa $S_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$ saa tietenkin käyttää vain, jos jono on aritmeettinen. Koska summan $1 + 2 + 4 + 7 + 11 = 25$ termit eivät muodosta aritmeettista jonoa, niin aritmeettisen jonon summakaavan tälle summalle antama tulos $5 \cdot \frac{1+11}{2} = 30$ on väärä.

Esimerkki. Kuinka suuri on paperirullan ulkosäde, jos 7500 metriä paperia kierretään rullalle sellaisen hylsyn ympärille, jonka säde on 0.30 metriä. Paperin paksuus on 0.00020 m.

Ratkaisu 1. Merkitään

$l =$ paperin pituus $= 7500$ m $\qquad r =$ hylsyn säde $= 0.30$ m

$p =$ paperin paksuus $= 0.00020$ m $\qquad n =$ paperikierrosten lukumäärä

Kierrospituudet

$u_1 = 2\pi r = 1.885$ m, $u_2 = 2\pi(r+p)$, $u_3 = 2\pi(r+2p)$, … , $u_n = 2\pi(r+(n-1)p)$

muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = 2\pi p = 0.001257$ m.

Muodostetaan yhtälö paperin pituudelle

$$l = n \cdot \frac{\cancel{2}\pi r + \cancel{2}\pi(r+(n-1)p)}{\cancel{2}} .$$

Kierrosmäärän n saa tästä toisen asteen yhtälöstä laskimen komennolla

$$\text{solve}(l = n\cdot(\pi r + \pi(r+(n-1)p)), n) \mid l = 7500 \text{ and } r = 0.3 \text{ and } p = 0.0002$$

Kierrosten määräksi saadaan 2267 tai -5266, joista jälkimmäinen ei tietenkään kelpaa. Paperirullan ulkosäde on siis

$$r + np = (0.30 + 2267\cdot 0.0002)\text{m} = \underline{\underline{0.75 \text{ m}}}.$$

Ratkaisu 2. Olkoon edellisten merkintöjen lisäksi $R =$ rullan ulkosäde. Koska paperin reunan pinta-ala on sama sekä rullattuna että suorana, niin

$$\pi R^2 - \pi r^2 = lp .$$

Tästä saadaan $R = \pm\sqrt{\dfrac{lp + \pi r^2}{\pi}} = \pm 0.75$ m, joista negatiivinen ei kelpaa.

Esimerkki. Määritä 50 mm ja 1250 mm pitkien ruuvipuristimien väliin 3 uutta välipituutta käyttäen **aritmeettista porrastusta**.

Pituuksista muodostuu nyt aritmeettinen jono

$$u_1 = 50,\ \underbrace{u_2 = 50 + d,\ u_3 = 50 + 2d,\ u_4 = 50 + 3d}_{\text{3 välikokoa}},\ u_5 = 50 + 4d = 1250$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $d = 300$, joten puristimien pituudet ovat 50, 350, 650, 950 ja 1250 mm.

15.4 Geometrinen jono ja sarja

Määritelmä. Lukujonoa sanotaan **geometriseksi**, jos aina kahden perättäisen jäsenen suhde $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = q = \text{vakio} = \text{ns. suhdeluku}$.

Esimerkki. Lukujono 2, 6, 18, 54 on päättyvä geometrinen lukujono, jonka suhdeluku q = 3. Jono $1, -0.5, 0.25, -0.125, \ldots$ on päättymätön geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = -0.5$.

Lause. Tarkastellaan geometrista jonoa, jonka ensimmäinen jäsen on a ja suhdeluku q. Tämän jonon $n.$ jäsen on

$$\boxed{u_n = a \cdot q^{n-1}} \; .$$

Saman jonon n ensimmäisen jäsenen summa on

$$\boxed{S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}} \; , \text{ jos } q \neq 1.$$

Päättymättömästä geometrisesta jonosta muodostuvan geometrisen sarjan summa on

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-q} \; , \text{ jos } |q| < 1}$$

Todistetaan geometrisen jonon n ensimmäisen jäsenen summaa S_n koskeva kaava vähentämällä kyseisestä summasta suhdeluvulla q kerrottu summa:

$$\begin{aligned}
S_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} \\
qS_n &= \phantom{a +{}} aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \\
\hline
(1-q)S_n &= a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - aq^n \quad \Big| \; :(1-q) \text{, jos } q \neq 1 \\
S_n &= a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

On ilmeistä, että päättymättömän geometrisen jonon summa S_∞ saadaan päättyvän geometrisen jonon summan S_n raja-arvona antamalla termien määrän n lähestyä ääretöntä:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot \frac{1-0}{1-q} = \frac{a}{1-q} \text{, jos } |q| < 1$$

Esimerkki. Edellisellä sivulla olleen esimerkin päättyvän geometrisen jonon 2, 6, 18, 54 summa saadaan joko helpolla yhteenlaskulla tai summakaavalla

$$S_4 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-3^4}{1-3} = 80.$$

Saman esimerkin mukaisen päättymättömän geometrisen sarjan $1-0.5+0.25-0.125+-...$ summa on

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-(-0.5)} = \frac{2}{3}.$$

Summakaavan edellä antamaa tulosta voi testata laskemalla jonon alkupään jäseniä yhteen joko Σ-lausekkeen avulla tai n:n ensimmäisen jäsenen summakaavan avulla, jolloin saadaan esimerkiksi

$$S_3 = 0.75\ ,\ S_6 = 0.65625\ ,\ S_{20} = 0.6666660 \text{ ja } S_{30} = 0.6666666660$$

Esimerkki. Määritä 50 mm ja 1250 mm pitkien ruuvipuristimien väliin 3 uutta välipituutta käyttäen **geometrista porrastusta**.

Pituuksista muodostuu nyt geometrinen jono

$$u_1 = 50\ ,\ \underbrace{u_2 = 50 \cdot q\ ,\ u_3 = 50 \cdot q^2\ ,\ u_4 = 50 \cdot q^3}_{\text{3 välikokoa}},\ u_5 = 50 \cdot q^4 = 1250\ .$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $q = \pm \sqrt[4]{\frac{1250}{50}} = \pm 2.236$, joista miinusmerkkinen ei tietenkään kelpaa. Puristimien pituudet ovat 50, 111.8 $\approx$ 110, 250, 559.0 $\approx$ 560 ja 1250 mm. Välikoot kannattaisi käytännössä valita ehkä vieläkin mukavammin 100, 250 ja 600 (tai 500) mm .

Esimerkki. Vanhemmat tallettavat lapsensa 1-, 2-, …, 15- vuotispäivinä lapsen tilille joka kerta 100 euroa. Paljonko lapsi voi nostaa tililtään 18-vuotispäivänään, jos tilille on maksettu vuosittain korkoa 8 % korkoa korolle -periaatetta noudattaen.

Eri vuosien talletusten tulevat arvot 18-vuotispäivänä ovat

1. vuoden talletuksen tuleva arvo on $100 \cdot 1.08^{17}$
2. vuoden talletuksen tuleva arvo on $100 \cdot 1.08^{16}$

…

15. vuoden talletuksen tuleva arvo on $100 \cdot 1.08^{3}$

ja ne muodostavat päättyvän geometrisen jonon, jonka jäsenten summa on

$$S_{15} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 100 \cdot 1.08^{17} \cdot \frac{1-(1/1.08)^{15}}{1-(1/1.08)} = 3420.38$$

tai helpommin takaperin laskien

$$S_{15} = 100 \cdot 1.08^3 \cdot \frac{1-1.08^{15}}{1-1.08} = 3420.38$$

Saman saat tietenkin nopeimmin laskimen summalausekkeesta $\sum_{i=3}^{17} 100 \cdot 1.08^i$.

Esimerkki. Kuinka suuret tasaerälyhennykset sinun on maksettava 1.1.2020, 1.1.2021, …, 1.1.2029, kun maksat pois korkoineen asuntolainan, jonka nostit viidessä 100000 euron erässä 1.1.2010, 1.1.2011, …, 1.1.2014. Korkoa maksetaan korollekin 6 % vuodessa.

Olkoon kertalyhennys *x.*

Ratkaisussa käytetään **kahden tilin ideaa:** Lasketaan nostojen tuleva yhteisarvo viimeisenä tilitapahtumapäivänä 1.1.2029 ajatellen, että asuntolainaa ei ole aiemmin lainkaan lyhennetty. Samoin lasketaan lyhennysten tuleva yhteisarvo prosessin loppuessa 1.1.2029 ajatellen, että lyhennykset talletetaan ensin samalla 6 prosentin korolla erilliselle lyhennysten tilille. Tilien tulevien arvojen tulee olla yhtä suuret 1.1.2029, jotta voimme silloin kerralla kuitata koko lainan maksetuksi.

Ensimmäisen	noston tuleva arvo 1.1.2029 on	$100000 \cdot 1.06^{19}$
Toisen	noston tuleva arvo 1.1.2029 on	$100000 \cdot 1.06^{18}$
…		…
Viimeisen	noston tuleva arvo 1.1.2029 on	$100000 \cdot 1.06^{15}$

Kaikkien nostojen tuleva yhteisarvo 1.1.2029 on $\sum_{i=15}^{19} 100000 \cdot 1.06^{i}$

Ensimmäisen	lyhennyksen tuleva arvo 1.1.2029 on	$x \cdot 1.06^{9}$
Toisen	lyhennyksen tuleva arvo 1.1.2029 on	$x \cdot 1.06^{8}$
…		…
Viimeisen	lyhennyksen tuleva arvo 1.1.2029 on	$x \cdot 1.06^{0}$

Kaikkien lyhennysten tuleva yhteisarvo 1.1.2029 on $\sum_{i=0}^{9} x \cdot 1.06^{i}$

Merkitään tilien tulevat arvot yhtä suuriksi, jolloin laskimen komennolla

$$\text{solve}\left(\sum_{i=15}^{19} 100000 \cdot 1.06^{i} = \sum_{i=0}^{9} x \cdot 1.06^{i}, x\right)$$

saadaan kertalyhennyksen *x* arvoksi 102494.74 euroa.

15.5 Useammankertaisista summista

Jonossa olevien lukujen summa voidaan usein esittää yhtä Σ -merkintää käyttäen, kuten edellä olemme jo nähneet.

Tasoalueessa olevien lukujen summa voidaan usein esittää ja laskea yhtenä kaksinkertaisena summalausekkeena, jos yleisen termin lauseke tunnetaan.

Esimerkki. Lasketaan seuraavan suorakulmaisen alueen sisällä olevien 15 luvun summa kahdella eri tavalla:

1. Lasketaan ensin vaakarivien summat, jotka on kirjoitettu kunkin vaakarivin loppuun, ja lopuksi nämä lasketaan yhteen.
2. Lasketaan ensin pystyrivien summat, jotka on kirjoitettu kunkin pystyrivin alle, ja lopuksi nämä lasketaan yhteen.

2^1	4^1	6^1	8^1	10^1	$\sum_{i=1}^{5}(2i)^1$
2^2	4^2	6^2	8^2	10^2	$\sum_{i=1}^{5}(2i)^2$
2^3	4^3	6^3	8^3	10^3	$\sum_{i=1}^{5}(2i)^3$
$\sum_{j=1}^{3}2^j$	$\sum_{j=1}^{3}4^j$	$\sum_{j=1}^{3}6^j$	$\sum_{j=1}^{3}8^j$	$\sum_{j=1}^{3}10^j$	

1. Vaakarivisummien summa yhdistetään kaksinkertaiseksi summaksi

$$\sum_{i=1}^{5}(2i)^{\boxed{1}}+\sum_{i=1}^{5}(2i)^{\boxed{2}}+\sum_{i=1}^{5}(2i)^{\boxed{3}}=\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{5}(2i)^{\boxed{j}}\right)\overset{\text{laskimella}}{=}2050\,.$$

Kunkin vaakarivin summalausekkeessa on esitetty aidattuna juuri tälle vaakariville ominainen eksponentti, joka on sitten otettu ulomman summan summausindeksiksi, joka saa arvot yhdestä kolmeen. Kaksinkertainen summa voidaan sitten laskea yhdellä laskinsyötteellä.

2. Lasketaan pystyrivisummien summa käyttäen vaihtelun vuoksi edellä määriteltyä steppisummafunktiota

$$\sum_{j=1}^{3}\boxed{2}^{j}+\sum_{j=1}^{3}\boxed{4}^{j}+\sum_{j=1}^{3}\boxed{6}^{j}+\sum_{j=1}^{3}\boxed{8}^{j}+\sum_{j=1}^{3}\boxed{10}^{j}=steppisumma\Big(\sum_{j=1}^{3}(\boxed{i}^{j}),\ \underbrace{i,2,10,2}_{\substack{\text{î käy kahdesta}\\ \text{kymmeneen}\\ \text{kahden välein}}}\Big)=2050\,.$$

Pystyrivisummissa on havainnollisuuden vuoksi aidattu kullekin pystyriville ominainen kantaluku, joka on sitten otettu ulomman summan summausindeksiksi, joka saa arvot kahdesta kymmeneen kahden välein kuten steppisumman alle on selitykseksi kirjoitettukin. Vaihtoehtoisesti kantaluvuista olisi voinut käyttää merkintää $2i$ ja antaa indeksille i arvot 1, 2, 3, 4 ja 5 yhden välein.

On selvää, että minkä tahansa alueen lukujen summa on riippumaton yhteenlaskujärjestyksestä, mutta tarvittava työmäärä ja laskujen vaikeus voi luonnollisesti riippua laskujärjestyksestä.

Esimerkki. Taulukossa

123	456	789	987	654	321
–123	–456	–789	–987	–654	–321
135	246	357	468	579	680
–135	–246	–357	–468	–579	–680

olevien lukujen summa on helppo päässälasku, mikäli lasketaan ensin sarakesummat, jotka lopuksi yhdistetään. Vaakarivisummien laskeminen ei olekaan yhtä helppoa, vaikka vaakarivisummienkin yhdistäminen antaa varmasti saman lopputuloksen kuin edellinenkin tapa.

Kolmiulotteisen avaruuden jossakin osassa olevien lukujen summa saadaan usein laskettua kolminkertaista summaa käyttäen.

Esimerkki. Lasketaan origosta avaruusalueen

$$5 \le x \le 10 \;,\; 0 \le y \le 10 \;,\; 0 \le z \le 5$$

kokonaislukupisteisiin vedettyjen kaapeleiden pituuksien summa, jos jokaiseen pisteeseen (*x, y, z*) vedetään oma kaapelinsa pitkin koordinaattimurtoviivaa (0, 0, 0) - (*x*, 0, 0) - (*x, y*, 0) - (*x, y, z*) .

Koska origosta pisteeseen (*x, y, z*) kulkevan koordinaattimurtoviivan pituus on $x + y + z$, niin kaapeleiden kokonaispituus on

$$\sum_{z=0}^{5}\left(\sum_{y=0}^{10}\left(\sum_{x=5}^{10}(x+y+z)\right)\right) = 5940$$

Esimerkki. Jos avaruusalueen $3 \le x_1 \le 9,\ 2 \le y_1 \le 6\ ,\ 1 \le z_1 \le 3$ jokaisesta kokonaislukupisteestä vedetään kaapeli suoraan toisen, vinosti ylempänä olevan avaruusalueen $2 \le x_2 \le 6,\ 3 \le y_2 \le 7,\ 4 \le z_2 \le 9$ jokaiseen kokonaislukupisteeseen, niin kaapeleiden yhteispituus saadaan kuusinkertaisena summana

$$\sum_{x_1=3}^{9}\left(\sum_{y_1=2}^{6}\left(\sum_{z_1=1}^{3}\left(\sum_{x_2=2}^{6}\left(\sum_{y_2=3}^{7}\left(\sum_{z_2=4}^{9}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\right)\right)\right)\right)\right) = \underline{\underline{93808.5}}$$

Harjoitustehtäviä

15.1 Esitä säännöt seuraavien lukujonojen yleisen jäsenen u_n laskemiseksi

v1) 11, 16, 21, 26, … **v2)** $3, -5, 7, -9, 11, -13, \ldots$

a) $-2, 4, -6, 8, -10, 12, \ldots$ **b)** 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

c) 40, 20, 10, 5, 2.5, 1.25, … **d)** $4, -7, 10, -13, 16, -19, \ldots$

15.2 Etsi sopivien yhtälöiden avulla palautuskaava jonon
v) 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85 , 171, … **a)** 2, 1, 7, 10, 31, 61,154,…
yleisen jäsenen laskemiseksi kahden edellisen jäsenen avulla muodossa $u_n = au_{n-2} + bu_{n-1}$, missä $n = 3, 4, 5, \ldots$ sekä a ja b ovat vakioita.

15.3 Kirjoita annetut summat Σ-merkintää käyttäen olettaen, että laskin tuntee vain stepin 1. Laske summat lopuksi laskimella.
v1) $51+61+71+81+\ldots+171$
v2) $150-160+170-180+190-+\ldots+1710$
a) $-1+4-9+16-25+36-+\ldots-123^2$
b) $73+83+93+103+\ldots+2343$
c) $2-4+8-16+32-+\ldots-1024$

15.4 Laske seuraavat summat käyttäen
(i) laskimesi sellaista Σ-toimintoa, joka tuntee vain stepin 1
(ii) laskimessasi mahdollisesti valmiina ollutta tai laskimeen itse määrittelemääsi ”steppisumma”-funktiota
v) $1234^2+1334^2+1434^2+1534^2+\ldots+3434^2$
a) $111^3+122^3+133^3+144^3+\ldots+11111^3+11122^3$

15.5 Sopivan säännön mukaan saatavien lukujen tulo (product) voidaan esittää käyttäen Σ-merkintää vastaavaa Π-merkintää. Niinpä esimerkiksi

$$\prod_{k=2}^{5} k = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\,.$$

Esitä tulot **v)** $7\cdot 10\cdot 13\cdot 16\cdot\ldots\cdot 31$
a) $62\cdot 63\cdot 64\cdot\ldots\cdot 71$ **b)** $213\cdot 223\cdot 233\cdot\ \ldots\ \cdot 423$
Π-merkintää käyttäen ja laske ne sitten laskimen sopivaa lausekemallia käyttäen aivan kuten Σ-lausekekin lasketaan. Muista, että nykyisissä laskimissa ”steppi” on vielä usein 1.

15.6 Laske välillä **v)** 10000 … 20000 **a)** 3000 … 15000
olevien luvulla 123 jaollisten lukujen summa kahdella tapaa:
(i) laskimen Σ-toimintoa käyttäen
(ii) lyhyestä syötteestä käyttäen laskinta vain nelilaskimena.

15.7 Lukua sanotaan kuutioluvuksi, jos se on kokonaisluvun kuutio.
Laske välillä **v)** $2\cdot 10^5 \ldots 5\cdot 10^5$ **a)** $5\cdot 10^5 \ldots 7\cdot 10^5$
olevien kuutiolukujen summa.

15.8 Paljonko tilillä on rahaa **v)** 1.1.2052 **a)** 1.1.2060,
jos vuosittain 1.1.2017, 1.1.2018, …, 1.1.2051 tilille talletetaan 500€? Korkoa maksetaan vuosittain 4 % (korkoa korolle periaatteella).

15.9 Kuinka suuret yhtä suuret summat on talletettava vuosittain 1.1.2017, 1.1.2018, …, 1.1.2034, jos vuosittain
v) 1.1.2040, 1.1.2041, … , 1.1.2060
a) 1.1.2035, 1.1.2036, … , 1.1.2055
halutaan aina nostaa 5000 €. Korkokanta on 7 %.

15.10 Kuinka suuret yhtä suuret summat on talletettava kahden vuoden välein 1.1.2020, 1.1.2022, … , 1.1.2040 , jos viiden vuoden välein
v) 1.1.2045, 1.1.2050, … , 1.1.2080
a) 1.1.2050, 1.1.2055, … . 1.1.2075
halutaan aina nostaa 5000 €. Korkokanta on 9 %. Suorita laskut myös steppiä 1 käyttäen, vaikka laskimesi tuntisi muutkin stepit.

15.11 Laske mahdollisimman lyhyellä syötteellä ilman Σ-toimintoa summat
a) $123+133+143+153+...+5423+5433$
b) $4+\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+...$ **c)** $1.23^5+1.23^6+1.23^7+...+1.23^{47}$
Tarkista tuloksesi laskimen Σ-toiminnolla.

15.12 Määritä oheisissa kolmion muotoisissa tasoalueissa olevien tulojen summat kaksinkertaisia summalausekkeita käyttäen.

v)

$$\begin{array}{cccccc}
30\cdot 10 & & & & & \\
30\cdot 11 & 35\cdot 11 & & & & \\
30\cdot 12 & 35\cdot 12 & 40\cdot 12 & & & \\
30\cdot 13 & 35\cdot 13 & 40\cdot 13 & 45\cdot 13 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
30\cdot 20 & 35\cdot 20 & 40\cdot 20 & 45\cdot 20 & \cdots & 80\cdot 20
\end{array}$$

a)

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 60\cdot 29 \\
 & & & & \iddots & \vdots \\
 & & & 12\cdot 13 & \cdots & 60\cdot 13 \\
 & & 9\cdot 12 & 12\cdot 12 & \cdots & 60\cdot 12 \\
 & 6\cdot 11 & 9\cdot 11 & 12\cdot 11 & \cdots & 60\cdot 11 \\
3\cdot 10 & 6\cdot 10 & 9\cdot 10 & 12\cdot 10 & \cdots & 60\cdot 10
\end{array}$$

15.13 Tasoalueen $0 \le x \le 5$, $5 \le y \le 10$ jokaisesta kokonaislukupisteestä vedetään oma kaapeli suoraan tasoalueen
v) $10 \le x \le 15$, $15 \le y \le 20$ **a)** $15 \le x \le 20$, $10 \le y \le 20$
jokaiseen kokonaislukupisteeseen. Montako kaapelia tarvitaan? Määritä niiden yhteispituus.

16. DETERMINANTEISTA

Determinantti on pystyviivojen sisään kirjoitettu neliönmuotoinen lukukaavio, joka voidaan sieventää yhdeksi luvuksi.

Määritelmä. Kaksirivisen determinantin arvo on $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

Muistisääntö. Kaksirivisen determinantin arvo lasketaan säännöllä ”laskeva tulo miinus nouseva tulo”.

Esimerkki. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 22$.

Määritelmä. Kolmirivisen determinantin arvo on

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Muistisääntö. Kolmirivisen determinantin arvon saat ajattelemalla kaksi ensimmäistä pystyriviä uudelleen ja käyttämällä sääntöä ”kolme laskevaa tuloa miinus kolme nousevaa tuloa”.

Esimerkki. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 4$$
$$- 2 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 = \underline{\underline{5}}$$

Huomautus. Kolmirivisen determinantin laskemisessa käyttämäämme menetelmää sanotaan **Sarrus´n säännöksi**.

Kolmirivinen determinantti voidaan laskea monilla muillakin tavoilla, joita me emme kuitenkaan tarkastele. Isot (ja usein pienetkin) determinantit kannattaa tietenkin laskea laskimella tai tietokoneella kohdistamalla det-funktio hakasulkeitten sisällä olevaan neliömäiseen lukujoukkoon eli matriisiin.

Huomautus. Sarrus´n sääntöä ei voi yleistää koskemaan suurempien determinanttien laskemista, vaan käsin laskettaessa isot determinantit tulee laskea eri menetelmillä, joita ei tässä monisteessa kuitenkaan käsitellä.

Huomautus. Determinanttien avulla monet matematiikan tulokset voidaan esittää kauniissa, helposti muistettavassa ja helposti yleistettävässä muodossa.

Determinanttien käyttö käsin laskettaessa ei kuitenkaan yleensä vähennä tarvittavan mekaanisen työn määrää, mutta laskemalla determinantit apuvälineillä me voimmekin kokonaan välttyä mekaaniselta rutiinityöltä!

Sovellus. Tasopisteiden (x_1,y_1) ja (x_2,y_2) kautta kulkevan suoran yhtälö on aiemmin esitetyn perusteella

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1)$$

tai determinanttien avulla kauniimmin esitettynä

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Matematiikkaa täysin tuntematon ”kadun mies” varmastikin pystyisi muistamaan kaavan helpommin determinanttimuodossa kuin meidän jo aiemmin tuntemassamme muodossa.

Esimerkki. Laskemme pisteiden (1,2) ja (3,4) kautta kulkevan suoran yhtälön molemmilla tavoilla:

$$y - 2 = \frac{2-4}{1-3} \cdot (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = 1 \cdot (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 1$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\substack{\text{Laskimella tai Sarrus´n} \\ \text{säännöllä kuudesta} \\ \text{kolmen tekijän} \\ \text{tulosta yhteenlaskien}}}{\Leftrightarrow} \quad -2x + 2y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 1$$

Huomaa, että **ainakin tässä esimerkissä determinantin käyttö lisää mekaanisen työn määrää** verrattuna siihen, että laskut lasketaan käsin ilman determinantteja.

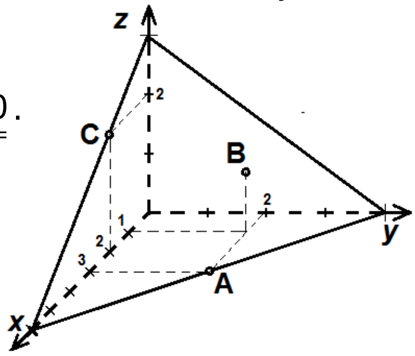
Edellinen sovellutus voidaan yleistää seuraavasti:

Sovellus. Kolmiulotteisessa avaruudessa kolmen pisteen (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) ja (x_3,y_3,z_3) kautta kulkevan tason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Esimerkki. Pisteiden A(3,2,0), B(1,2,1) ja C(2,0,2) määrittämän tason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\substack{\text{lasketaan} \\ \text{vasen puoli} \\ \text{laskimella}}}{\Leftrightarrow} \quad \underline{\underline{2x + 3y + 4z - 12 = 0}}.$$



Tämä taso leikkaa

- x-akselia, kun $y = z = 0$ eli kohdassa $x = 6$
- y-akselia, kun $x = z = 0$ eli kohdassa $y = 4$
- z-akselia, kun $x = y = 0$ eli kohdassa $z = 3$.

Huomautus. Edellisten sovellusten tulos on helppo yleistää n-ulotteisiin avaruuksiin $(n = 4, 5, 6, \ldots, 123, \ldots)$, vaikkei meillä ole niistä edes mielikuvaa!

Aikaisemman sovelluksen yleistys. Neliulotteisessa avaruudessa neljän pisteen (x_1, y_1, z_1, w_1), … , (x_4, y_4, z_4, w_4) kautta kulkevan hypertason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Huomautus. Kiinnitä huomiota siihen, kuinka kaunis ja helposti yleistettävä on moniulotteisen avaruuden pisteiden kautta kulkevan hypertason yhtälö determinanttien avulla esitettynä. Determinanttien laskeminen on tosin työlästä, mutta sitä vartenhan meillä on tehokkaat apuvälineet!

Sovellus monikulmion pinta-alan laskemiseksi. Jos tasomonikulmion kärkipisteet koko ajan samaan suuntaan kiertäen ovat (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n), niin monikulmion ala on puolet peräkkäisten pisteiden koordinaateista muodostettujen kaksirivisten determinanttien summan itseisarvosta:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right| .$$

Huomaa, että lopuksi on palattava takaisin lähtöpisteen koordinaatteihin!

Esimerkki. Tasokolmion (1,2)(3,1)(4,0) ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| (1-6) + (0-4) + (8-0) \right| = \frac{1}{2}$$

Huomautus. Determinantit liittyvät ennen kaikkea lineaaristen yhtälöryhmien teoriaan esimerkiksi seuraavassa esitettävien lauseiden mukaisella tavalla:

Lause (Cramerin sääntö). Mikäli lineaarisen $n \times n$-yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

tuntemattomien kertoimista muodostuva ns. **kerroindeterminantti**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eroaa nollasta, niin ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$x_1 = \frac{D_1}{D}\ , \ x_2 = \frac{D_2}{D}\ , \ ... \ , \ x_i = \frac{D_i}{D}\ , \ ... \ , \ x_n = \frac{D_n}{D}\ ,$$

missä determinantti D_i saadaan kerroindeterminantista D korvaamalla tuntemattoman x_i kertoimista muodostuva pystyrivi oikean puolen vakioilla.

Esimerkki. Ratkaise y determinanttien avulla ryhmästä $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = \mathbf{-4} \\ 5x + 2y - 3z = \mathbf{0} \\ x - y + z = \mathbf{2} \end{cases}$.

Koska nimittäjään tuleva kerroindeterminantti eroaa nollasta, niin

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{-4} & -4 \\ 5 & \mathbf{0} & -3 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 12 - 40 - 0 + 12 + 20}{4 - 9 + 20 + 8 - 6 - 15} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

Tuntematonta y laskettaessa on siis osoittajaan kirjoitettava muutoin sama kerroindeterminantti kuin nimittäjäänkin, mutta y:n kertoimet on korvattava oikean puolen (lihavoiduilla) vakioilla.

Lause. Mikäli lineaarisen $n \times n$-yhtälöryhmän kerroindeterminantti on nolla, niin ryhmällä on joko 0 tai äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki. Ratkaise lineaarinen yhtälöpari $\begin{cases} kx+3y=6 \\ 3x+ky=k-3 \end{cases}$ kaikilla kertoimen k arvoilla.

1. Mikäli kerroindeterminantti eroaa nollasta, niin ryhmällä on laskimenkin antama yksikäsitteinen ratkaisu $x=\dfrac{3}{k-3}$, $y=\dfrac{k-6}{k-3}$.

2. Lisäksi on tutkittava ne tapaukset, joissa kerroindeterminantti on nolla:

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2-9=0 \Leftrightarrow k=\pm 3.$$

2a) Arvolla $k=3$ saadaan ristiriitainen ryhmä $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$, joka ei ratkea.

2b) Arvoa $k=-3$ vastaavalla yhtälöparilla $\begin{cases} -3x+3y=6 \\ 3x-3y=-6 \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua, jotka voidaan antaa muodossa $\begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y=x+2 \end{cases}$.

Vastaavan tuloksen saat TI-Nspire CX CAS -laskimella kirjoittamalla yhtälöparin tavallisen ratkaisukomennon perään with-operaattorin ja kertointa k koskevan ehdon seuraavasti:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} k\cdot x+3y=6 \\ 3x+k\cdot y=k-3 \end{cases}, x, y\right) \Big| k=-3 \quad \boxed{\hookleftarrow} \quad x=c1-2 \text{ and } y=c1$$

3. Yhtälöparin täydellinen ratkaisu voidaan nyt kirjoittaa muodossa:

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} \text{Jos } k\neq \pm 3, \text{ niin } \begin{cases} x=3/(k-3) \\ y=(k-6)/(k-3) \end{cases} \\ \text{Jos } k=3, \text{ niin ryhmällä ei ole ratkaisua} \\ \text{Jos } k=-3, \text{ niin } \begin{cases} x \text{ mielivaltainen} \\ y=x+2 \end{cases} \end{cases}$$

Huomautus. Jos lineaarisen yhtälöryhmän kertoimissa esiintyy parametri, niin nykyiset laskimet ratkaissevat ryhmän oma-aloitteisesti vain niillä parametrin arvoilla, joilla kerroindeterminantti eroaa nollasta.

Ne tapaukset, joissa kerroindeterminantti on nolla, on tarvittaessa tutkittava erikseen. Laskin ratkaisee kyllä nämäkin tapaukset, kunhan vain parametrille annetaan (vaikka with-operaattoria) käyttäen kyseiset poikkeukselliset arvot.

Harjoitustehtäviä

16.1 Laske laskimella ja mahdollisuuksien mukaan myös käsin determinantit

v) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

16.2 Laske determinanttien avulla **v)** nelikulmion (1,2) (4,-1) (5,4) (-2,5) ala **a)** viisikulmion (1,1) (4,0) (3,5) (2,1) (1,3) ala.

16.3 Määritä pisteiden **v)** (3, 2) ja (-1, 5) **a)** (4, 3) ja (2, -1) kautta kulkevan suoran yhtälö sekä determinantteja käyttäen että aiemmin esitetyllä tavalla.

16.4 Määritä pisteiden
v) (1,2,3), (2,2,2) ja (3,4,-1) **a)** (2,1,3), (3,2,4) ja (5,2,1)
kautta kulkevan tason yhtälö. Missä pisteissä taso leikkaa koordinaattiakselit? Onko piste (2,3,4) kyseisessä tasossa vai sen ylä- tai alapuolella?

16.5 Ratkaise *y* Cramerin säännöllä ryhmästä

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + v = 7 \\ x + z + v = 8 \\ y + z + v = 9 \end{cases}$

Huomaa, että c-kohdassa sinun tulee ajatella kustakin yhtälöstä puuttuva tuntematon nollalla kerrotuksi omalle paikalleen.

16.6 Ratkaise ryhmä

v) $\begin{cases} 2x + ky = 1 \\ kx + 8y = k - 2 \end{cases}$ **a)** $\begin{cases} 3x - 4ky = 2 \\ kx - 12y = k - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 5 \\ 2x + 2y + z = k \end{cases}$

laskinta hyödyntäen. Kiinnitä erityistä huomiota niihin kertoimen *k* arvoihin, joilla ryhmällä on muu kuin laskimen oma-aloitteisesti antama yksikäsitteinen ratkaisu.

17. MATRIISEISTA

17.1 Määritelmiä ja laskutoimituksia

Matriisi on hakasulkeisiin kirjoitettu suorakulmionmuotoinen lukutaulukko, jota determinantista poiketen ei voi sieventää yhdeksi luvuksi, koska taulukon jokaisella luvulla on oma yksilöllinen merkityksensä.

Esimerkki. Varaosamyymälän hyllykön ylähyllyn lokeroissa on kolmenkokoisia teräksisiä varaosia: isoja, keskikokoisia ja pieniä. Alahyllyn lokeroissa on vastaavasti kolmenkokoisia alumiinisia osia. Eri osien määrät voidaan esittää matriisina $A = A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriisin tunnuksena käytetään tavallisesti isoa kirjainta, johon voidaan liittää alaindeksit ilmoittamaan matriisin "tyypin" eli vaaka- ja pystyrivien lukumäärät (tässä järjestyksessä!).

Matriisissa olevaa lukua (alkiota) merkitään matriisin tunnusta vastaavalla pikkukirjaimella, johon liitetään kaksi alaindeksiä kertomaan alkion paikan eli alkioon liittyvien vaaka- ja pystyrivien järjestysnumerot tässä järjestyksessä.

Esimerkki. Edellisessä esimerkissä $a_{13} = 5$, mikä tarkoittaa, että ylähyllyn kolmannessa lokerossa on 5 teräksistä pientä varaosaa.

Vaikka matriisia ei voi sieventää luvuksi, niin niillä voidaan suorittaa laskutoimituksia, joiden tuloksina saadaan joko uusia matriiseja tai lukuja. Seuraavassa määrittelemme tällaisia laskutoimituksia lähtien liikkeelle matriisien yhtäsuuruuden käsitteestä.

Määritelmä. Kahta matriisia A ja B sanotaan **yhtä suuriksi** (merkitään $A = B$), jos matriisit ovat samaa tyyppiä ja kaikki vastinalkiot ovat pareittain yhtä suuret.

Esimerkki. Koska $A_{2\times3}$ ja $B_{3\times2}$ ovat eri tyyppiä, niin ne eivät voi olla yhtä suuret. Vaikka matriisit $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ovat samaa tyyppiä ja niissä on samat alkiot, niin ne ovat erisuuret, koska esimerkiksi vastinalkiot $c_{12} = 2$ ja $d_{12} = 3$ ovat erisuuret.

Määritelmä. Samaa tyyppiä olevien matriisien yhteen- ja vähennyslasku suoritetaan vastinalkioittain.

Esimerkki. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+3 & 5+0 \\ 1+1 & 3+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

Tämän yhteenlaskun tuloksen voimme tulkita esimerkiksi hyllykön uudeksi sisällöksi täydennyksen jälkeen. Vastaavasti vähennyslaskun tulos voitaisiin tulkita hyllykön uudeksi sisällöksi sen jälkeen, kun varaosia on myyty.

Määritelmä. Matriisi kerrotaan luvulla siten, että matriisin alkiot kerrotaan tällä luvulla.

Esimerkki. $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Määritelmä. Matriisilla $A_{p\times q}$ voidaan kertoa matriisi $B_{q\times r}$, jos sisemmät indeksit (nyt q ja q) ovat samat. Tuloksena saadaan ulompien indeksien ilmoittamaa tyyppiä $p \times r$ oleva matriisi, jonka *i*:nnen vaakarivin ja *j*:nnen pystyrivin leikkauskohdassa oleva alkio saadaan ensimmäisen matriisin *i*:nnen vaakarivin ja jälkimmäisen matriisin *j*:nnen pystyrivin "pistetulona".

Esimerkki. $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 2}$ on tyyppiä 1×2 , mutta $B_{4\times 2} \cdot A_{1\times 2}$ ei ole määritelty.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3+5\cdot 5 & 2\cdot 2+1\cdot 4+5\cdot 6 \\ 1\cdot 1+3\cdot 3+0\cdot 5 & 1\cdot 2+3\cdot 4+0\cdot 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 30 & 38 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Nimityksiä. Nollamatriisi on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia.

Neliönmuotoista matriisia $A_{n\times n}$ sanotaan **neliömatriisiksi**.

Neliömatriisin vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevaa lävistäjää sanotaan matriisin **päälävistäjäksi**.

Neliömatriisia, jossa kaikki päälävistäjän ulkopuolella olevat alkiot ovat nollia, sanotaan **lävistäjämatriisiksi**.

Lävistäjämatriisi, jonka kaikki päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä, on **ykkösmatriisi (eli yksikkö- eli identiteettimatriisi).**

Matriisin A **transponoitu matriisi** A^{T} saadaan muuttamalla matriisin A vaakarivit pystyriveiksi järjestys säilyttäen.

Tyyppejä $A_{1\times m}$ ja $B_{n\times 1}$ olevia matriiseja sanotaan "ulkomuodon" mukaan **vaaka- ja pystyvektoreiksi.**

Esimerkki. $0_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ on tyyppiä 2×3 oleva nollamatriisi.

$A = \begin{bmatrix} 1111 & 2222 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ on eräs neliömatriisi.

Sen determinantti on $\det(A) = \begin{vmatrix} 1111 & 2222 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1111 - 4444 = -3333$

Transponoimalla saadaan $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1111 & 2 \\ 2222 & 1 \end{bmatrix}$.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ on eräs lävistäjämatriisi.

$I_2 = I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ on tyypiä 2×2 oleva ykkösmatriisi.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ on tyyppiä 1×3 oleva vaakavektori.

Lause. Jos mielivaltainen matriisi A kerrotaan sopivankokoisella ykkösmatriisilla kummalta puolelta tahansa, niin tulokseksi saadaan A.

Esimerkki. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Huomautus. Matriisien kertolasku ei noudata vaihdantalakia, joten AB on yleensä eri kuin BA. Matriisitulossa ei siis saa vaihtaa tekijöiden järjestystä.

Esimerkki. $A_{2\times3} \cdot B_{3\times4}$ on määritelty ja on tyyppiä 2×4, mutta toisessa järjestyksessä oleva tulo $B_{3\times4} \cdot A_{2\times3}$ ei ole edes määritelty.

Vaikka molemmat tulot AB ja BA olisivatkin määritellyt, niin ne voivat olla eri tyyppiä ja vaikka ne olisivatkin samankokoisten neliömatriisien tuloina samaa tyyppiä, niin yleensä ne silti eroavat joidenkin vastinalkioidensa osalta.

Lause. Matriisitulo noudattaa liitäntälakia ts. matriisitulon saa ryhmitellä suluilla miten tahansa: $A(BC) = (AB)C = ABC$, jos yksikin tuloista on määritelty.

Määritelmä. Neliömatriisin A potenssi määritellään luonnollisella tavalla tulona $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, missä on n tekijää, kun $n \in \mathbb{N}$.

Harjoitustehtäviä

17.1.1 Laske seuraavista matriiseista sekä käsin että laskimella kaikki ne kahden eri matriisin summat ja tulot, jotka voidaan laskea.

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $C=B^T$, $D=A^T$, $E=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$, $F=E^T$

17.1.2 Olkoot $A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}$,

$I_{2\times2}=2\times2-$yksikkömatriisi ja $O_{2\times2}=2\times2-$nollamatriisi.

Laske käsin ne seuraavista lausekkeista, jotka ovat määriteltyjä. Tarkista tulokset laskimella.

$A+B^T$, $C-D$, $C+E$, $3C+\frac{D}{2}$, $A\cdot B$, $B\cdot A$,

$I_{2\times2}\cdot E$, $E\cdot I_{2\times2}$, $O_{2\times2}\cdot E$, C^2 , B^3 , $E^T\cdot E$

17.1.3 Muodosta matriiseista

$A_{1\times1}$, $B_{2\times1}$, $C_{1\times2}$, $D_{2\times2}$, $E_{2\times3}$, $F_{2\times4}$, $G_{3\times3}$, $H_{4\times2}$

mahdollisimman monen matriisin tulo. Mikä on sen tyyppi? Kukin matriisi saadaan käyttää korkeintaan kerran.

17.1.4 Olkoon $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix}i&j\\k&l\end{bmatrix}$.

Osoita vaikkapa laskinta hyödyntäen, että $(XY)Z=X(YZ)$.

Tulomatriisien vertaaminen on aika työlästä, joten laskepa laskimellasi tulomatriisien erotus, jonka tulee olla nollamatriisi.

17.1.5 Keksi sellaiset matriisit *A* ja *B*, että

a) matriisituloista *AB* ja *BA* vain toinen on määritelty,

b) molemmat tulot *AB* ja *BA* on määritelty, mutta tulot ovat erityyppiset,

c) molemmat tulot *AB* ja *BA* ovat samaa tyyppiä, mutta alkioiltaan erilaiset,

d) $AB=BA=$sopivan kokoinen ykkösmatriisi,

e) $AB=BA\neq$ykkösmatriisi.

17.2 Käänteismatriisi

Määritelmiä. Kahta neliömatriisia A ja B sanotaan toistensa **käänteismatriiseiksi**, jos niiden tulo kummassakin järjestyksessä on ykkösmatriisi ts. jos $AB = BA = I$.

Tällöin merkitään $B = A^{-1}$ ja $A = B^{-1}$.

Matriisia sanotaan **säännölliseksi** eli **kääntyväksi**, jos sillä on käänteismatriisi.

Lause. Neliömatriisilla A on käänteismatriisi $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Käänteismatriisin laskeminen käsin on yleensä varsin työläs tehtävä, joka kannattaakin suorittaa laskimella tai tietokoneella tavallista potenssimerkintää käyttäen.
2×2 -matriisin kääntämiseksi on muistisääntö, joka kannattaa muistaa ulkoa:

Muistisääntö. Jos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, niin $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$.

”Kääntyvän 2×2 –matriisin käänteismatriisi saadaan jakamalla matriisin determinantilla se alkuperäisestä matriisista saatava matriisi, jossa päälävistäjän alkiot ovat vaihtaneet paikkaa ja muut alkiot ovat muuttaneet merkkiään.”

Esimerkki. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{4-6} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$.

Tarkistus: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$.

Laske käänteismatriisi laskimellasi tavallista potenssimerkintää käyttäen.

Huomautus. Matriisien jakolaskua ei ole määritelty. Sitä vastaa kuitenkin käänteismatriisilla kertominen. Koska tämä kertolasku voidaan suorittaa kummalta puolelta tahansa ja lopputulokset ovat yleensä erisuuret, niin jakolaskujakin olisi kahdenlaisia: jako vasemmalta ja jako oikealta!

17.3 Matriisiyhtälön ratkaiseminen

Matriisiyhtälössä tuntemattomana on matriisi, joka ratkaistaan käyttäen samanlaisia operaatioita kuin tavallisenkin yhtälön ratkaisussa:

- Matriisisumman (tai erotuksen) terminä oleva matriisi voidaan siirtää yhtälön puolelta toiselle, kunhan matriisin etumerkki samalla muutetaan.
- Matriisiyhtälön molemmat puolet saa kertoa tai jakaa samalla nollasta eroavalla luvulla.
- **Matriisiyhtälön molemmat puolet saa kertoa samalla säännöllisellä (eli kääntyvällä) matriisilla, kunhan molemmat puolet kerrotaan samalta puolelta: joko molemmat vasemmalta tai molemmat oikealta.**

Vaikka et ehkä voi ratkaista laskimellasi matriisiyhtälöä millään solve-komennolla alkuperäisessä muodossaan, niin matriisiyhtälön ratkaisussa tarvittavat käänteismatriisien määrittämiset ja matriisien laskutoimitukset voit suorittaa laskimellasi.

Esimerkki. Ratkaistaan matriisi X yhtälöstä

$$2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Big| \text{ Siirrä } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ oikealle ja suorita vähennyslasku}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \Big| :2$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esimerkki. Olkoot $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Ratkaistaan matriisiyhtälöt

a) $AX = B$ ja b) $BAYB^{-1} = A$.

Ratkaisu. Koska $\det(A) = -2$ ja $\det(B) = -2$ eroavat nollasta, niin A ja B ovat säännöllisiä ja niillä on käänteismatriisit olemassa.

a) Kerrotaan yhtälön $AX = B$ molemmat puolet A^{-1}:llä vasemmalta:

$$A^{-1}\cdot \;\Big|\quad AX = B$$

$$\underbrace{\overbrace{A^{-1}A}^{=I}\, X}_{=X} = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}\cdot B \overset{\text{Laskimella}}{=} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Ensin eliminoidaan tuntemattoman Y reunimmaiset kerroinmatriisit B ja B^{-1} kertomalla yhtälö vasemmalta B^{-1}:llä ja oikealta B:llä :

$$B^{-1}\cdot \quad \Big| \qquad BAYB^{-1} = A \qquad \Big| \; \cdot B$$

$$\underbrace{B^{-1}B}_{=I}AY\underbrace{B^{-1}B}_{=I} = B^{-1}AB$$

Lopuksi eliminoidaan kerroinmatriisi A saadusta sievennetystä yhtälöstä:

$$A^{-1}\cdot \quad \Big| \qquad AY = B^{-1}AB$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}Y = A^{-1}B^{-1}AB$$

$$Y = A^{-1}B^{-1}AB \overset{\text{Laskimella}}{=} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}}$$

Laskiessasi matriiseja X ja Y laskimen avulla voit ehkä käyttää with-operaattoria tai määritellä matriisit A ja B etukäteen.

Huomaa, että tulomuotoista **matriisiyhtälöä ratkaistaessa yhtälön molemmat puolet kerrottiin sopivalla kääntyvällä matriisilla kullakin kertaa aina samalta puolelta:** joko molemmat puolet oikealta tai molemmat vasemmalta. Koska matriisitulo ei ole vaihdannainen, niin yhtälön eri puolia ei saa kertoa eri puolilta, sillä silloin lopputulokset yleensä olisivat erisuuret eikä yhtälö enää kertomisen jälkeen olisikaan voimassa.

Matriisiksi, jolla kertominen suoritetaan, valitaan tuntemattoman matriisin kerroinmatriisin käänteismatriisi, sillä tällöin matriisitulon päähän saadaan muodostettua ykkösmatriisi, jonka voi jättää tulosta pois.

Harjoitustehtävä

17.3.1 Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja $E = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Määrittele ensin annetut matriisit laskimeen. Ratkaise sitten seuraavista matriisiyhtälöistä tuntematon matriisi X laskinta hyödyntäen ja oleelliset välivaiheet näkyviin kirjoittaen. Tarkista tuloksesi laskemalla lopuksi kunkin yhtälön vasen puoli (tai vasemman ja oikean puolen erotus, jolloin lopputuloksen oikeellisuuden näkee helpommin).

a)	$AX = B$	b)	$ABX = C$	c)	$ABXC = D$
d)	$B^{-1}XA^T = C$	e)	$2A + X = 3B$	f)	$XA = E^T$
g)	$3X = A$	h)	$A^2X = B$	i)	$2X + 3A = 4B$
j)	$A^{-1}BX = C^T$	k)	$(A+B)X = 3C$	l)	$2B^2X = E$

17.4 Lineaarisen ryhmän matriisiratkaisu

Esimerkki. Lineaariset ryhmät voidaan muuntaa matriisiyhtälöiksi seuraavasti:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax+by \\ dx+ey \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ ex+fy+gz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ h \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \\ gx+hy=i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax+by \\ dx+ey \\ gx+hy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

Johtopäätös: Jokainen lineaarinen yhtälöryhmä voidaan esittää matriisiyhtälönä muodossa

Kerroinmatriisi $\times$ tuntemattomista muodostuva pystyvektori
$=$ oikean puolen vakioista muodostuva pystyvektori

Huomautus. Jos lineaarisen $n \times n$ - yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä, niin ryhmän voi ratkaista kertomalla vastaavan matriisiyhtälön vasemmalta kerroinmatriisin käänteismatriisilla.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x+5y=14 \end{cases}$ siirtymällä ensin matriisimuotoon ja kertomalla sitten kerroinmatriisin käänteismatriisilla:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{Merkitään } A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \Big| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}_{=10-12=-2}} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20+21 \\ 16-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\underline{x=1,\ y=2}}$$

Harjoitustehtäviä

17.4.1 Kirjoita seuraavat lineaariset yhtälöryhmät matriisimuotoon sekä ratkaise matriisiyhtälönä kohta a käsin sekä kohdat b ja c laskimella.

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+3y=7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x+3y-z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x + 3z=5 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3y=6 \\ x+y=4 \end{cases}$

17.5 Matriisit toistuvissa muutoksissa

Matriisin potenssi soveltuu hyvin toistuvien muutosten tarkasteluun.

Esimerkki. Ohje: Lue seuraavan taulukon rivien ja sarakkeiden selitykset myötäpäivään alkaen vasemmasta reunasta.

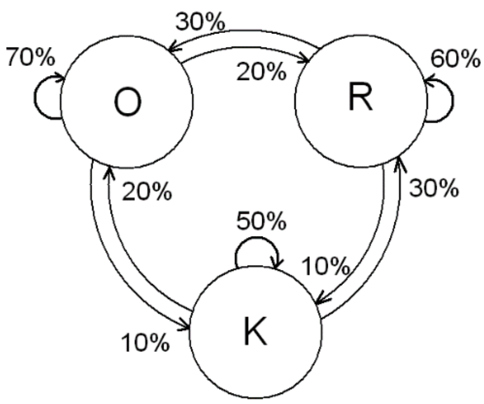
... on vuoden kuluttua ...	... omakoti-asujia	... rivitalo-asujia	... kerrostalo-asujia
Omakotiasujista ...	70%	20%	10%
Rivitaloasujista ...	30%	60%	10%
Kerrostaloasujista ...	20%	30%	50%

Niinpä esimerkiksi ”Omakotiasujista on vuoden kuluttua rivitaloasujia 20%”.

Oletetaan, että taulukon tutkimustulokset on talletettu laskimeen matriisiksi $M = \begin{bmatrix} .7 & .2 & .1 \\ .3 & .6 & .1 \\ .2 & .3 & .5 \end{bmatrix}$ juuri tässä muodossa. Oletetaan, että kutakin asukastyyppiä on aluksi 1 000 000.

a) Laske asukkaiden teoreettiset lukumäärät yhden ja viiden vuoden kuluttua.
b) Tutki kokeillen, mihin lukumääriin asukasluvut tuntuvat ajanoloon asettuvan.
c) Määritä vakiintuneet teoreettiset asukasluvut myös kokeilematta suoraan yhden yhtälöryhmän avulla.

Asukasmäärien vuosittaisia muutoksia voi havainnollistaa viereisellä kuvalla.



a) Merkitään eri asukasmääriä n vuoden kuluttua $o(n), r(n)$ ja $k(n)$. Koska

$$\begin{cases} o(n+1) = 0.7\,o(n) + 0.3\,r(n) + 0.2\,k(n) \\ r(n+1) = 0.2\,o(n) + 0.6\,r(n) + 0.3\,k(n) \\ k(n+1) = 0.1\,o(n) + 0.1\,r(n) + 0.5\,k(n) \end{cases},$$

niin asukasmäärät ovat vuoden kuluttua

$$\begin{bmatrix} o(1) \\ r(1) \\ k(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o(0) \\ r(0) \\ k(0) \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} 10^6 \\ 10^6 \\ 10^6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1\,200\,000 \\ 1\,100\,000 \\ 700\,000 \end{bmatrix}}}$$

ja viiden vuoden kuluttua

$$\begin{bmatrix} o(5) \\ r(5) \\ k(5) \end{bmatrix} = \left(M^T\right)^5 \begin{bmatrix} 10^6 \\ 10^6 \\ 10^6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1\,406\,000 \\ 1\,088\,880 \\ 505\,120 \end{bmatrix}}}.$$

b) Rupeamme laskemaan asukasmääriä esimerkiksi 10, 20, 50, 100, 200, … vuoden kuluttua. Tällöin nähdään, että jo aikavälillä 20 – 50 vuotta asukasmäärien teoreettiset muutokset ovat sadasosien luokkaa eli laskuja ei tarvitsekaan jatkaa pidemmälle. Niinpä teoreettiset vakiintuneet asukasluvut ovat $1\,416\,667$, $1\,083\,333$ ja $500\,000$ 1416667, 1083333 ja 500000.

c) Merkitään vakiintuneita lukumääriä kirjaimilla o, r ja k. Koska vakiintuneessa tilanteessa asukasmäärät ovat seuraavana vuonna samat kuin edellisenäkin vuonna, niin saamme seuraavan ryhmän kolme ylintä yhtälöä. Yksi näistä yhtälöistä on kuitenkin suora seuraus kahdesta muusta ja siksi se on hyödytön. Tarvittava kolmas yhtälö saadaan siitä, että asukkaista on aina kolme miljoonaa. Niinpä

$$\begin{cases} o = 0.7o + 0.3r + 0.2k \\ r = 0.2o + 0.6r + 0.3k \\ k = 0.1o + 0.1r + 0.5k \\ \quad o + r + k = 3 \cdot 10^6 \end{cases} \overset{\substack{\text{Jätä yksi kolmesta} \\ \text{ylimmästä yhtälöstä} \\ \text{pois}}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\begin{cases} o = 1\,416\,667 \\ r = 1\,083\,333 \\ k = \quad 500\,000 \end{cases}}}$$

Turha yhtälö kannattaa jättää pois sillä **likiarvoilla laskettaessa** laskin voi lisäehdon vuoksi hyvinkin päätyä tulokseen, että ryhmä on mahdoton.

Huomaa, että **aluksi hankalalta ja jopa kummalliselta tuntunut matriisien kertolasku on määritelty niin, että se sopii tavattoman hyvin sekä lineaaristen yhtälöryhmien että toistuvien muutosten käsittelemiseen samoin kuin moniin muihinkin sovelluksiin.**

Harjoitustehtävä

17.5.1 Oletetaan, että sähkökilpailutuksen lisääntyessä joka vuosi 10 % sähkölaitoksen A asiakkaista siirtyy sähkölaitoksen B asiakkaiksi, 20 % sähkölaitoksen B asiakkaista siirtyy sähkölaitoksen A asiakkaiksi ja muut jatkavat asiakassuhdettaan.
Oletetaan, että alussa sähkölaitoksen A asiakkaiden määrä on 100000 ja laitoksen B asiakkaiden määrä 500000. Määritä asiakasmäärät 1, 5, 10, 20, 50 ja 100 vuoden jälkeen. Määritä myös vakiintuneet asiakasmäärät kahdella eri tavalla.

VASTAUKSIA TEHTÄVIEN v-OSIOIHIN

10.1 **v1)** (Luku) kaksi kuuluu suljettuun väliin kahdesta viiteen. Oikein.
v2) Jos $x^2 > 4$, niin $x > 2$. Väärin, sillä esimerkiksi -3 toteuttaa vasemmanpuoleisen ehdon, mutta ei oikeanpuoleista.
v3) $x < y$ silloin ja vain silloin, kun $-x > -y$. Oikein.

10.3 **v1)** 123 / 100 **v2)** 11914 / 990

10.6 $\binom{50}{2} \cdot 2^{48} \cdot (-3)^2 = 3103261618234982400 \approx 3.103 \cdot 10^{18}$

11.3 10, 10/9, 1/10, 101

11.4 **v1)** $\begin{cases} -x-3, \text{ kun } x < -3 \\ x+3, \text{ kun } x \geq -3 \end{cases}$ **v2)** $\begin{cases} x+2, \text{ kun } x < -0.5 \\ -3x, \text{ kun } -0.5 \leq x < 1 \\ -x-2, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$

11.7 $y = -1.81333x - 0.45333$

11.12 Parillinen

11.18 Jaksollinen jaksona $T/3$

12.1.1 **v1)** On **v2)** Ei

12.1.2 $(-5, 3)$ ja $(2, 10)$

12.1.3 $(0, 19)$ ja $(0, -5)$

12.1.4 $3\sqrt{2}$

12.1.5 $(-4.06, 16.5), (-0.951, 0.905), (0.676, 0.457), (4.34, 18.8)$

2.1.7 $x_1 = -1, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 4$

12.2.2 i) $t = -2$ ii) $t = 9/2$

12.2.4 $y = -4x + 5$

12.2.5 (41/13, 40/13)

12.2.6 64/9

12.2.7 $11/\sqrt{5}$

12.2.8 1/2

12.2.9 $24/\sqrt{10} \approx 7.59$

12.2.10 **v1)** $x = 2, y = 1$ **v2)** ei ratkaisua **v3)** $\begin{cases} y \text{ mielivalt.} \\ x = 2y + 4 \end{cases}$ eli $\begin{cases} x \text{ mielivalt.} \\ y = 0.5x - 2 \end{cases}$

12.3.2 $y - 1 = 3(x-2)^2$ eli $y = 3x^2 - 12x + 13$

12.3.3 $x - 3 = -\dfrac{2}{25}(y+1)^2$ eli $x = -0.08y^2 - 0.16y + 2.92$

12.3.4 $y = 1.5x^2 - 6.5x + 8$

12.3.5 $x = 1.5y^2 - 0.5y + 1$

12.3.7 $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 18 = 0$

12.4.1 **v1)** $\text{kp} = (3, -1)$, $r = 2$ **v2)** $\text{kp} = (-1, 3)$, $r = 2$

12.4.2 i) $c < 13$ ii) $c = 13$ iii) $c > 13$

12.4.3 $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$

12.4.4 $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

12.4.5 $3x - 4y - 15 = 0$

12.4.6 $7\sqrt{2} \approx 9.899$

12.5.1 $\dfrac{(x-2)^2}{8^2} + \dfrac{(y+5)^2}{4^2} = 1$ eli $x^2 + 4y^2 - 4x + 40y + 40 = 0$

12.5.3 **i**) $t < 25$, keskipiste $(1, -2)$, puoliakselit $\sqrt{25-t}/3$ ja $\sqrt{25-t}/2$
ii) $t = 25$ iii) $t > 25$

12.8.5 **v1)** $y = 2$ **v2)** $x^2 + y^2 - 6x = 0$ **v3)** $y = -x + 2$

14.4 **v1)** $4.323 \cdot 10^{46203}$ **v2)** $1.159 \cdot 10^{24962}$

14.7 i) $\ln \frac{2(a+b)}{3ab^3}$ ii) $\ln 2 + \ln(a+b) - \ln 3 - \ln a - 3\ln b$

iii) TI-Nspire CX CAS antoi vastauksen i)

14.8 **v1)** 75 mm **v2)** 59.95 mm

14.13 (i) 10.40895% (ii) 231865.26 €

14.15 65.4 °C

14.16 (i) 240 (ii) 75

15.1 **v1)** $u_n = 5n + 6$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **v2)** $u_n = (-1)^{n\pm 1}(2n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

15.2 $u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$

15.3 **v1)** $\underbrace{\sum_{n=5}^{17}(10n+1)}_{\text{Helpompi löytää}} \overset{\text{tai}}{=} \sum_{n=1}^{13}(10n+41) = 1443$

v2) $\underbrace{\sum_{n=15}^{171}(-1)^{n+1}10n}_{\text{Helpompi löytää}} \overset{\text{tai}}{=} \sum_{n=1}^{157}(-1)^{n+1}10(n+14) = 930$

15.4 135413788

15.5 $\prod_{k=2}^{10}(3k+1) = 132067936000 \approx 1.32 \cdot 10^{11}$

15.6	1215486	**15.7**	7058079	**15.8**	38299.16 €
15.9	1136.15 €	**15.10**	298.75 €	**15.12**	52525
15.13	1296 , 18595.75	**16.1**	13 , 0 , 0	**16.3**	$3x + 4y - 17 = 0$

16.4 $x + y + z - 6 = 0$,

Taso leikkaa koordinaattiakselit kohdissa $x = 6$, $y = 6$, $z = 6$.

Piste (2,3,4) on tasossa olevan pisteen (2,3,1) yläpuolella

16.6 Jos $k \neq \pm 4$, niin $\begin{cases} x = \dfrac{k+2}{k+4} \\ y = \dfrac{-1}{k+4} \end{cases}$. Jos $k = 4$, niin $\begin{cases} y = \text{mielivaltainen} \\ x = -2y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Jos $k = -4$, niin ryhmä mahdoton.

Ojalain laskuopit -oppimateriaalisarjaan kuuluvassa teoksessa Algebra on pyritty huomioimaan insinööriopetuksessa tapahtunut lähiopetuksen voimakas vähentyminen. Matematiikassakin on keskityttävä kaikkein oleellisimpaan: käsitteiden hallitsemiseen, apuvälineiden tehokkaaseen hyödyntämiseen mekaanisen käsinlaskennan asemasta sekä suoritettujen laskujen ja saatujen tulosten selkeään esittämiseen.

Yhden kirjoittajan omat opiskelijat ovat viime vuodet käyttäneet TI-Nspire CX CAS -laskimia. Siksi teoksessa on hyödyllisiä ohjeita kyseisen laskimen käytöstä. Monet opiskelijat ovatkin tyytyväisinä todenneet ”oppineensa näkemään metsän puilta”. Myös muiden symbolisten laskimien ja matematiikkaohjelmien käyttäjät saavat kirjasta ideoita oman apuvälineensä hyödyntämiseen.

Osan Algebra lisäksi tekijöiltä on ilmestymässä muitakin osia. Kaikki sarjan osat ovat vapaasti tulostettavissa ja jaettavissa koko sivun kopioina opetuskäyttöön.

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit 1/2016
ISSN 2323-8364
ISBN 978-951-633-207-2

Julkaisija
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi