

**Vaasan ammattikorkeakoulu,  
University of Applied Sciences Publications  
OTHER PUBLICATIONS C10**

**VÄSYMISLUJUUDEN MITOITUSMENETELMÄT  
- nykytila ja tulevaisuuden näkymät**

**Matti Makkonen**

**Vaasa 2011**



## TIIVISTELMÄ

Laitteiden ja rakenteiden ei-hitsattujen osien väsymismitoituksessa käytetään yhä eniten perinteisiä keinoja: jännitys-elinikämenetelmää sekä venymä-elinikämenetelmää. Tämän kirjoituksen yhtenä tavoitteena on tuoda kirjoittajan pitkän kokemuksen pohjalta esille se, että nämä menetelmät ovat hyvin epävarmoja ja voivat johtaa sekä huomattavaan ylimitoitukseen että vaarallisen suuruiseen alimitoitukseen. Julkaisussa käsitellään menetelmien taustaa ja heikkouksia sekä esitellään keinoja, joilla sudenkuoppia voidaan kiertää.

Kirjoituksessa osoitetaan, että väsymissäröjen ydintyminen on pitkälti tilastollinen ilmiö ja sen vuoksi tarkkoihin väsymislujuusennusteisiin pyrittäessä tulee käyttää tilastollisia menetelmiä. Monet tutkijat ovat tulleet samaan johtopäätökseen ja tilastolliset menetelmät ovatkin tällä hetkellä laajan tutkimustyön kohteena. Kirjoittaja esittelee lyhyesti kaksi kehitettyä menetelmää väsymisrajan ennustamiseen. Tarkemmin esitellään kirjoittajan kehittämä menetelmä, joka soveltuu sekä väsymisrajan että äärellisen kestoian ennustamiseen. Tavoitteena on osoittaa, että tilastollisten menetelmien käyttöönotto käytännön mitoitustyössä on koska tahansa mahdollista.

Käsittelyn laajuus kirjoituksessa rajataan vakioamplitudiseen ja yksiakseliseen jännitystilaan.

## **ABSTRACT**

---

The most commonly used methods in the fatigue design of machines and structures are still the traditional techniques; the stress – life method and the strain – life method. One aim of this paper is to use the author’s long practical experience in fatigue design to emphasize that these methods are very unsafe. They can lead on the other hand to great overdesign and on the other hand to dangerously non-conservative design. The background of the methods is discussed and some ways to overcome the risks are presented.

It is shown in the paper that the nucleation of fatigue cracks is largely statistical phenomenon. Therefore, in order to obtain accurate estimates of fatigue strength, the use of statistical methods is essential. Many researchers share this view today and statistical methods are today being widely investigated. The author gives a short introduction to two statistical methods of estimating the fatigue limit. A closer look is taken to the method developed by the author. This can be applied to fatigue limit as well as low cycle fatigue problems. The aim is to prove that implementing the statistical methods in practical fatigue design is possible any time.

The extent of the paper is limited to constant amplitude and uniaxial loading.

# SISÄLTÖ

	TIIVISTELMÄ	
	ABSTRACT	
1	JOHDANTO	7
2	SÄRÖN YDINTYMINEN JA KASVUMEKANISMI	9
	2.1 Särön ydintyminen ja lyhyen särön kasvu	9
	2.2 Stabiili särönkasvu	10
	2.3 Siirtyminen lyhyen särön kasvusta stabiiliin särönkasvuun	11
3	JÄNNITYS-ELINIKÄ – KÄYRÄT	13
	3.1 Wöhlerin menetelmän arviointia	13
	3.2 Teknologinen koon vaikutus	14
	3.3 Väsymislajuuden riippuvuus staattisesta lujuudesta	14
	3.4 Wöhler ja lovellisten kappaleiden väsymislajuus	15
	3.5 Koesauvojen tulosten muuntaminen todellisille komponenteille	16
	3.6 Lovellisten kappaleiden ongelmia	17
4	VENYMÄ-ELINIKÄ – KÄYRÄT	19
	4.1 Venymä-elinikä – menetelmän perusteet	19
	4.2 Venymä-elinikä – menetelmän arviointia	20
5	PERINTEISTEN MENETELMIEN RISKIT	23
	5.1 Käytännön tapaus	23
	5.2 Ajatuksia herättäviä tutkimustuloksia	24
	5.3 Alustavia johtopäätöksiä	25
6	MURTUMISMEKANIikka	27
7	ÄÄRIARVOTEORIAN PERUSTEITA	29
8	TILASTOLLISIA MENETELMIÄ VÄSYMISRAJAN ENNUSTAMISEEN	33
	8.1 Böhm:n menetelmä	33
	8.2 Murakamin menetelmä	34
9	VÄSYMISRAJAN TILASTOLLINEN ENNUSTAMINEN	37
	9.1 Tilastollisen mitoituksen ongelmat ja niiden kiertotiet	37
	9.2 Tilastollisen koon vaikutusluvun määrittäminen	38
	9.3 Tehollinen jännityspinta-ala	39
	9.4 Tehollinen jännityspinta-ala lovikohdissa	41
	9.5 Koon vaikutusluvun soveltaminen käytännön rakenteille	42
10	GEOMETRINEN KOON VAIKUTUS	45

11	ÄÄRELLISEN KESTOIÄN ENNUSTAMINEN	49
	11.1 Ydintymisiän ennuste	49
	11.2 Särön kasvuiän laskeminen	51
12	VÄSYMISLUJUUDEN TYÖKALUJEN KEHITTÄMINEN	53
	12.1 Väsymisrajan määrittäminen	53
	12.2 Geometrinen koon vaikutus	53
	12.3 Särön ydintymisikä	53
	12.4 Särönkasvuiän laskeminen	54
	12.5 Suunnittelukäyrästöt	54
	12.6 Teknologiset vaikutukset	55
13	LASKUESIMERKKEJÄ	57
	13.1 Esimerkki 1: sileän sauvan väsymisraja	57
	13.2 Esimerkki 2: sileän sauvan äärellinen kestoikä	57
	13.3 Esimerkki 3: lovellisen sauvan väsymisraja	59
14	LÄHTEET	63

# 1 JOHDANTO

Tämän julkaisun tarkoituksena on tehdä lyhyt katsaus tärkeimpiin tällä hetkellä käytössä oleviin hitsaamattomien rakenteiden mitoitusmenetelmiin. Kirjoituksen kimmokkeena on kirjoittajan lähes 30 vuoden kokemus mitoitustyöstä sekä osallistuminen lukuisiin VTT:n ja Lappeenrannan yliopiston tutkimusprojekteihin. Lisäksi pohjana on kirjoittajan väitöskirja sekä aiheesta sen jälkeen julkaistut artikkelit International Journal of Fatigue -lehdessä.

Julkaisussa arvioidaan kriittisesti perinteisten mitoitusmenetelmien toimivuutta ja niiden heikkouksia sekä esitetään keinoja menetelmien tarkkuuden parantamiseksi. Käsittely rajataan vain yksiakσιαaliseen jännitystilaan ja vakioamplitudiseen kuormitukseen.

Useat tutkijat ovat tulleet siihen johtopäätökseen, että väsymislujuuden arviointiin tulee käyttää tilastollisia menetelmiä. Pohjana on se, että metallin mikrorakenteen syntyprosessi on luonteeltaan satunnainen ja särön ydintyminen siksi pitkälti tilastollinen ilmiö. Särön syntyyn ja kokoon vaikuttavat mm. metallin rakeiden koko, liukutasojen suuntautuminen, epäpuhtaudet ja muut hilarakenneviat. Tässä julkaisussa käydään lyhyesti läpi eräitä tilastollisia menetelmiä ja esitellään tarkemmin kirjoittajan kehittämä metodi.





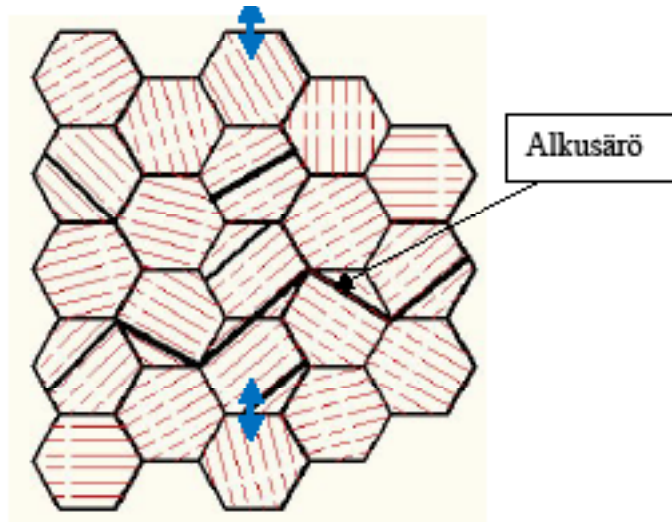
## 2 SÄRÖN YDINTYMIS- JA KASVUMEKANISMI

Seuraava esitys perustuu pääosin professori Darrell Socien vierailuluentoon Teknillisessä Korkeakoulussa syksyllä 1995 [5]. Malli on hyvin karkea, mutta antanee käsityksen särön syntyvästä ja kasvusta.

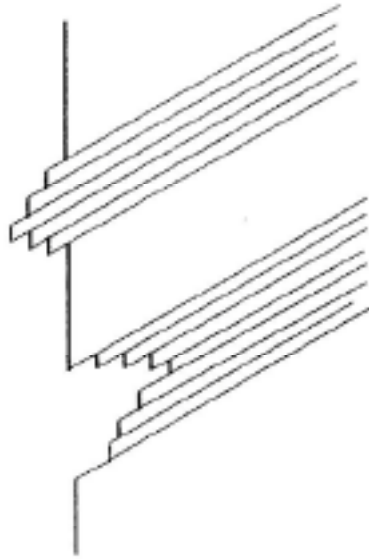
### 2.1 Särön ydintyminen ja lyhyen särön kasvu

Tarkastellaan veto-puristus – sauvaa, johon vaikuttaa syklinen kuorma. Kuvioon 1 on hahmoteltu suurennettu sauvan halkileikkauksesta kappaleen pinnasta. Siinä näkyy joukko rakeita ja niiden hilatasojen = liukutasojen suuntautuminen. Sellaiset rakeet, joiden liukutasot sattuvat suunnilleen leikkausjännityksen maksimin suuntaan, tässä tapauksessa 45°, ovat alttiita säröytymiselle. Tämä johtuu siitä, että niissä tapahtuu kuormitettuna tasojen liukumaa kuvion 2 tapaan eli niihin syntyy liukunauhoja. Pintojen liukuessa edestakaisin käy joskus niin, että pintojen välillä atomien sidokset katkeavat. Syyksi on esitetty paljastuvan pinnan hapettumista. Tämä ei kuitenkaan voi olla koko totuus, koska säröjä syntyy myös pinnan alle. Sulkeumilla ja muilla virheillä on useimmiten synnyssä oma roolinsa: itse asiassa valtaosasta syntyneistä säröjä löydetään tutkimusten mukaan sulkeuma ydintymiskohdasta.

Jos syntyvät mikrosäröt muodostavat sopivan ketjun kuten kuviossa 1, ne voivat yhtyä ja muodostaa alkusärön. Edellä oleva on karkea malli niin sanotusta *lyhyen särön* kasvusta.



**Kuvio 1.** Mikrosäröjen syntyminen.

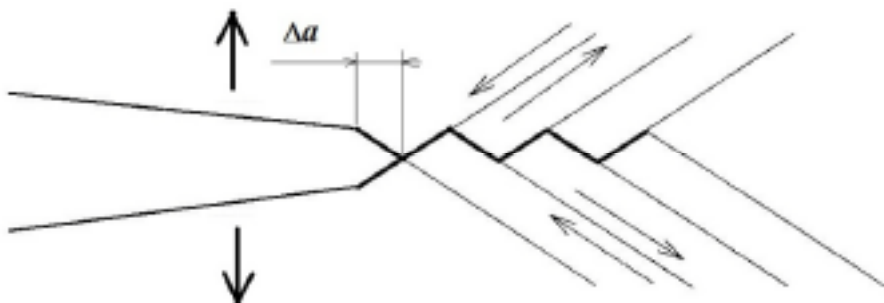


**Kuvio 2.** Liukunauhoja kappaleen pinnassa [5]

## 2.2 Stabiili särönkasvu

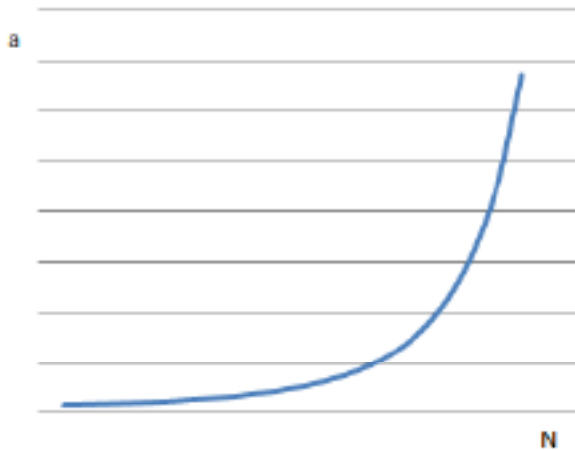
Jos syntynyt alkusärö ylittää kriittisen koon, kasvumekanismi vaihtuu pitkän särön moodiin eli alkaa ns. stabiili särönkasvu. Tässä mekanismissa mikrorakenteella on enää vähäinen rooli. Stabiilin särönkasvun mekanismia havainnollistetaan kuviossa 3:

- Särö aukeaa vetojännityksen vaikutuksesta.
- Särön kärjessä on plastisen muodonmuutoksen alue, jossa muodostuu leikkausnauhoja.
- Pinnoissa tapahtuu  $\Delta a$ : n suuruinen liukuma leikkausnauhoja pitkin.
- Särö sulkeutuu kuorman poistuessa.



**Kuvio 3.** Stabiilin särönkasvun mekanismi [5]

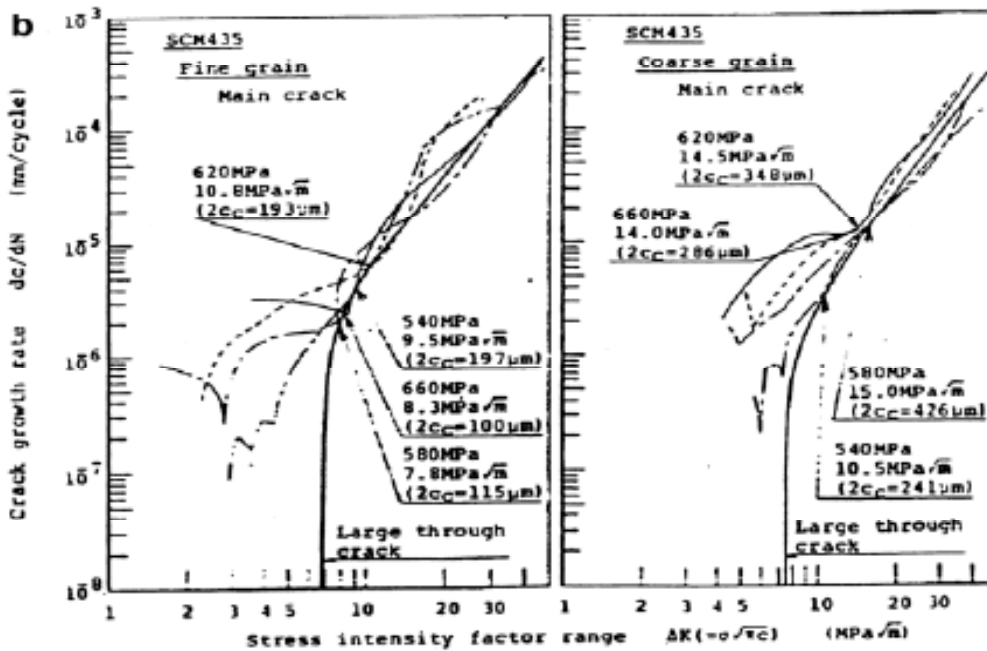
Lopputuloksena särö on pidentynyt  $\Delta a$ :n verran. Prosessi toistuu jokaisella kuormituskerralla ja  $\Delta a$  kasvaa kerta kerralta, koska särön kärjen edessä oleva plastisoitunut alue on aina hiukkasen suurempi. Särön edetessä kasvu siten kiihtyy eksponentiaalisesti kuvion 4 mukaisesti. Lopulta osan poikkileikkauksen jäljellä oleva kannas ei enää kannaa kuormaa ja tapahtuu loppumurtuma, joka on usein haurasmurtuma.



**Kuvio 4.** Särön  $a$  pituuden kasvu kuormanvaihtokertojen funktiona (periaatteellinen)

### 2.3 Siirtyminen lyhyen särön kasvusta stabiiliin särönkasvuun

Stabiili särönkasvu voidaan mallintaa hyvällä tarkkuudella lineaarielastista murtumismekaniikkaa (LEFM) käyttäen. Sen mukaan särönkasvu noudattaa ns. Parisin lakia (ks. luku 11). Sen sijaan ydintymisvaiheelle ei ole onnistuttu lukuisista yrityksistä huolimatta kehittämään samantapaista kaavaa. Kuviossa 5 on piirros erään koekappaleen säröjen ydintymisvaiheen kasvusta. Kuvioon ei ole piirretty niitä säröjä, joiden kasvu pysähtyy alkuunsa johonkin sopivaan esteeseen kuten raerajaan: valtaosa syntyvistä mikrosäröistä on näitä. Kuvioon piirretyt säröt ovat läpäisseet kaikki esteet ja ovat pääsemässä stabiiliin kasvuvaiheeseen eli alkavat kasvaa kuvioon piirretyin Parisin lain kuvaajan mukaan.



Kuvio 5. Lyhyen särön kasvu [18, 284]

Kuvasta nähdään, että lyhyiden säröjen käyttäytyminen on hyvin epäsäännöllistä. Välillä kasvu on hyppäksenomaista, välillä kasvu pysähtyy eteen tulevaan esteeseen. Helposti on pääteltävissä, että ilmiön kuvaaminen pelkästään Parisin lain kaltaisella kaavalla on vaikeaa: ilmiötä on lähestyttävä myös tilastollisin menetelmin.

Eräät tutkijat haluavat jakaa särön kasvun kolmeen vaiheeseen: särön ydintyminen, lyhyen särön kasvu ja stabiili särönkasvu. Yleisimmin kaksi ensin mainittua yhdessä luetaan särön ydintymisvaiheeksi. Kirjoittajan mielestä tämä on loogista kahdesta syystä:

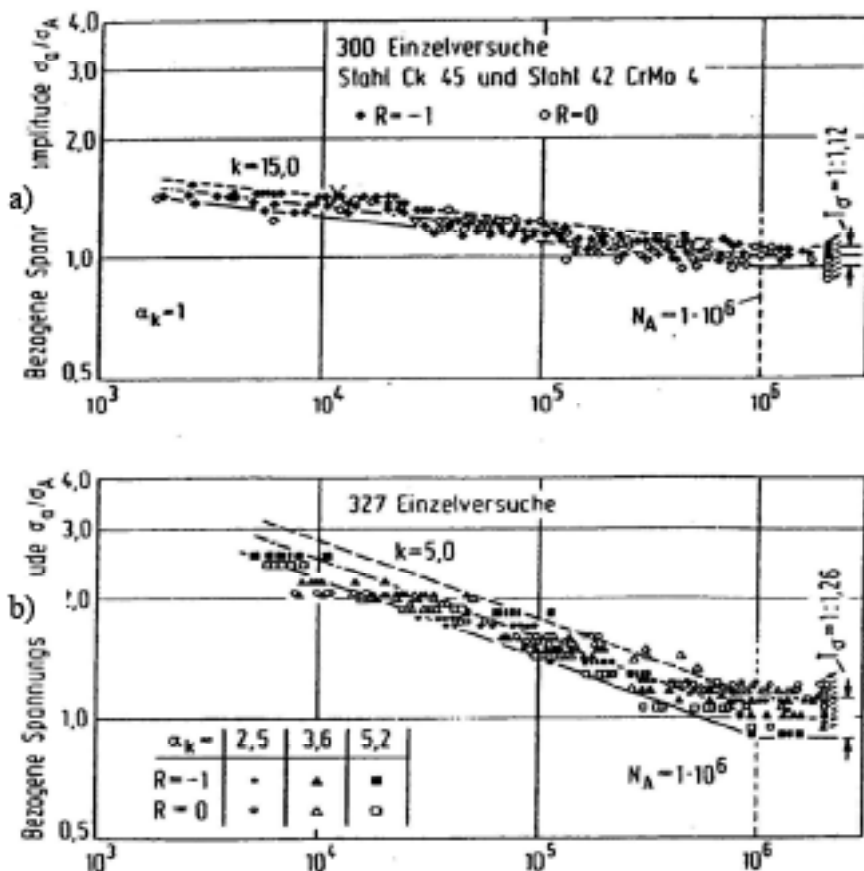
- Lyhyen särön kasvulle ei näytä olevan löydettävissä determinististä kasvulakia.
- Suunnittelijan kannalta ratkaisevaa on, syntyykö kappaleeseen kriittisen kokoinen, kasvukykyinen alkusärö vai ei. Mikä alkusärön tarkka synty tapa on ollut, lienee toisarvoista.

### 3 JÄNNITYS-ELINIKÄ – KÄYRÄT

August Wöhler oli ensimmäinen tunnettu väsymislajuuden tutkija. Hän julkaisi tuloksiaan jo 1860-luvulla. Jännitys-elinikäkäyriä kutsutaan Euroopassa hänen mukaansa Wöhler-käyriksi, Amerikassa käytetään nimitystä S-N- käyrä. Hämmästyttävää kyllä, Wöhler-käyrät ovat edelleen eniten käytetty väsymismitoitusmenetelmä, vaikka sen heikkoudet ovat yleisesti tiedossa.

#### 3.1 Wöhlerin menetelmän arviointia

Kuviossa 6 on suureen joukkoon koetuloksia sovitetut Wöhler-käyrät. Kun näitä tarkastellaan edellisen luvun särönkasvumekanismien valossa, heikkoudet ovat ilmeisiä. Käyrät sisältävät sekä ydintymisen että särönkasvun. On helppo todeta, että sellaisenaan käyriä voi käyttää vain kohteisiin, jotka ovat kooltaan, muodoltaan ja materiaaliltaan hyvin lähellä koekappaletta. Erikokoisissa kappaleissa ydintymisen ja särönkasvun suhde tietenkin muuttuu. Pienissä kappaleissa (kuten koekappalet!) ydintymisen osuus voi olla yli 80 % eliniästä, suurissa ydintymisikä lyhenee (ks. luku 11.1), mutta kasvuikä pitenee.



Kuvio 6. Wöhler-käyrät: a) sileät koekappaleet, b) lovelliset koekappaleet [22, 25]

Toisaalta on huomattu, että kappaleen koon kasvaessa väsymislujuus alenee. Useissa käsikirjoissa tämä selitetään jännitysgradientin vaikutuksella: taivutusjännityksen alaisissa osissa gradientti on jyrkempi pienissä kappaleissa. Luvun 10 murtumismekaanisella tarkastelulla voidaan kuitenkin todistaa, että jännitysgradientin vaikutus niinkin pienessä kuin Ø10 mm tangossa on vain 2 %:n luokkaa, isommissa sen merkitys on häviävän pieni. On myös olemassa koetuloksia, jotka osoittavat, että koon vaikutus esiintyy myös vetokuormitetuissa osissa [7]. Nähdään vielä, että koon vaikutus on mukana yhtä lailla, kun kappaleen poikkileikkaus on vakio, mutta pituutta kasvatetaan: ks. esimerkiksi luvussa 5.2 esitetyt koetulokset. Ilmiötä ei voikaan selittää millään muulla kuin tilastollisella koon vaikutuksella, johon paneudutaan luvussa 9.

Huomautetaan vielä, että kuvioon 6 on merkitty koetulosten hajonta, joka on melko suuri. Osa hajonnasta selittyy sillä, että kuvan pohjana käytetyt koesauvat lienevät olleet erikokoisia. Näin ollen tilastollinen koon vaikutus on tuonut hajontaan oman lisänsä, kuten luvussa 9 opitaan.

### 3.2 Teknologinen koon vaikutus

Koon vaikutuksesta puhuttaessa tulee erottaa teknologiset vaikutukset. Tunnetusti materiaalin murto- ja myötölujuus alenevat materiaalipaksuuden kasvaessa. Takana on ennen muuta jäähtymisnopeuksien ero aihoiden valmistusprosessissa: isossa kappaleessa jäähtymisnopeus on kiteytymisvaiheessa hitaampi ja sen seurauksena raekoko kasvaa.

Muita teknologisia koonvaikutusefektejä voivat aiheuttaa ainakin:

- Valuprosessi: lujusvaihtelut eri paksuisissa kappaleen kohdissa.
- Taonta ja valssaus: rakeiden muokkautuminen ja suuntautuminen, erilaiset jäähtymisnopeudet.
- Kappaleen pintojen viimeistelymenetelmät.

### 3.3 Väsymislujuuden riippuvuus staattisesta lujuudesta

Buch on osoittanut suureen koemäärän vertaamalla, että väsymisrajan ja murtolujuuden välillä on hyvä korrelaatio yhtälön (1) mukaan [1]. Kaava pätee matala- ja keskilujuuksisille teräksille.

$$\Delta\sigma_{R,rb} = 0,454 \cdot R_m + 8,4 \text{ MPa} \quad (1)$$

missä  $\Delta\sigma_{R,rb}$  = materiaalin väsymislujuus

$R_m$  = materiaalin murtolujuus

Ei ole mitään syytä olettaa, etteikö kaava olisi voimassa myös samalle aineelle ainespaksuuden kasvaessa. Niinpä väsymisrajaa on aina korjattava todellista aihion paksuutta vastaavaksi.

Asiaan liittyy vielä eräs käytännön pulma. Paksussa kappaleessa sisäosa on aina pehmeämpää kuin pinta. Lujuus pienenee myös samassa kappaleessa sisäänpääntäessä. Jos kappaleesta koneistetaan paljon materiaalia, väsymislujuus tulisi arvioida ao. kohdan lujuuden mukaan.

Yllä oleva kaava koskee periaatteessa vain taivutusvaihtolujuutta. Kuten edellisessä luvussa mainittiin, todellisuudessa aksiaalisessa kuormassa väsymislujuus on sama kuin taivutusvaihtolujuus. Kirjallisuudessa raportoitu ero selittyy sillä, että vetokokeet on tehty suorilla sauvoilla ja taivutuskokeet usein tiimalasin muotoisilla. Jälkimmäisessä tapauksessa tehollinen pinta-ala jää hyvin pieneksi muodon takia. Eron selittääkin tällöin tilastollinen koon vaikutus.

Kaavasta saatava tulos on voimassa vaihtolujuudelle eli jännityssuhteelle  $R = -1$  (keskijännitys = 0). Keskijännityksen ollessa suurempi, on sen vaikutus huomioitava. Se voidaan tehdä perinteisin tavoin: esim. Goodmanin kaavalla, Smithin piirroksella tai Haigh-diagrammilla.

### 3.4 Wöhler ja lovellisten kappaleiden väsymislujuus

Suurin ongelma Wöhler-käyrien käytössä on soveltumattomuus lovellisten kappaleiden väsymisiin arviointiin. Syynä on loven kohdan jyrkkä jännitysgradientti. Se vaikuttaa sekä särön ydintymiseen että stabiiliin särönkasvuun. Särö etenee kasvaessaan kohti matalamman jännityksen aluetta ja särönkasvu on hitaampaa kuin lineaarisessa jännityskentässä. Tämän vuoksi sileillä koesauvoilla laaditut Wöhler-käyrät eivät päde lovellisille kappaleille. Buch on pyrkinyt pienentämään haittaa määrittämällä lovellisille sauvoille omat käyrät, kuvio 6 b. Tämä menettely vaatisi kuitenkin suuren joukon suunnittelukäyriä erilaisille lovimuodoille.

Lovellisen kappaleen väsymislujuuden huomataan olevan korkeampi kuin sileän. Sitä on selitetty ns. ”materiaalin loviherkkyydellä”, joka lasketaan yhtälöstä ( 2 ):

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (2)$$

missä  $q$  = loviherkkyyysluku

$K_t$  = lovenmuotoluku

$K_f$  = lovenvaikutusluku

Kaavasta voidaan laskea lovenvaikutusluku, jos loviherkkyysluku tiedetään. Loviherkkyyslukujen laskentakaavoista käytetyin lienee Petersonin käsikirjassa [2] esitetty. Lukuisia muitakin lovenvaikutuslukujen laskentatapoja on kehitetty [11, 12]. Jo niiden määrä kertoo, että menettely on hyvin epävarma. Kirjoittaja on osoittanut [3], että lovenvaikutus koostuu kahdesta tekijästä: tilastollinen koon vaikutus (ks. luku 9) sekä jännitysgradientin vaikutus (luku 10). Sellaista tekijää kuin loviherkkyys ei niin muodoin ole olemassakaan.

### **3.5 Koesauvojen tulosten muuntaminen todellisille komponenteille**

Kaikki käsikirjat lähtevät siitä, että kiillotetuilla koesauvoilla kokeellisesti määritetyistä Wöhler-käyristä saatavia väsymislujuusarvoja korjataan kokemuseräisillä kertoimilla. Näitä ovat ainakin:

- koon vaikutusluku
- pinnanlaadun kerroin
- luotettavuuskerroin.

Kuten edellä kerrottiin, koon vaikutus jakautuu kahteen osaan: teknologiset vaikutukset ja tilastollinen koon vaikutus. Ensin mainittu otetaan huomioon alentamalla tarvittaessa materiaalin murtolujuutta kaavassa (1) todellista lujuutta vastaavaksi. On siis tiedettävä, mikä koesauvan murtolujuus on ollut ja mikä on kohdekappaleen (vieläpä ao. kohdan!) lujuus.

Tilastollinen koon vaikutus voidaan arvioida kuvion 13 avulla (katso lähemmin luku 9). Kuvaa käytettäessä on tunnettava koetulosten hajonta väsymiskokeessa. Jollei tarkkaa arvoa tunneta, kuten valitettavan usein on laita, kannattaa valita hajonnan arvo varman päälle. Se tarkoittaa, että koesauvaa isompia kappaleita tarkasteltaessa käytetään suurta hajonnan arvoa ja pienille kappaleille (lovet!) pientä. Mainittua käyrästä käytettäessä kappaleen ”koko” määräytyy kappaleen jännityksen alaisen pinta-alan mukaan. Jos jännitys kappaleen mitalla muuttuu, joudutaan laskemaan ns. tehollinen jännityspinta-ala: tästä lähemmin luvussa 9.3.

Luotettavuuskerroin riippuu siitä, millä luotettavuustasolla koekappaleen Wöhler-käyrä on piirretty. Jos se vastaa keskimääräistä lujuutta kuten kuvio 6 ja kaava (1), on käytettävä kerrointa, jolla muutetaan arvo suunnitteluarvoksi (varmuusluku = 1.0). Useimmiten käytetään 95 % tai 97,7 % luotettavuutta vastaavia suunnitteluarvoja. Kertoimen suuruus riippuu jälleen koetulosten hajonnasta. Normaalisti kerroin on n. 0,9.

Pinnan laadun kerroin löytyy useista käsikirjoista. Näitä kertoimia käytetään paremman puutteessa. Pinnan karheus (= naarmujen syvyys) on oikeasti satunnaismuuttuja. Se pitäisi arvioida tilastollisesti samaan tapaan kuin suurimman alkusärön koko ja summata jälkimmäiseen tilasomatematiikan keinoin. Pinnan karheudesta ei ole valitettavasti julkaistu tällaista tietoa, joten tässä täytyy tyytyä käsikirjojen likiarvoihin.



### 3.6 Lovellisten kappaleiden ongelmia

Kuten edellä kerrottiin, lovellisten kappaleiden väsymislujuuden ennustaminen Wöhlerin menetelmällä ei ole mahdollista kohtalaisellakaan tarkkuudella. Luvussa 3.4 todistettiin, että ”lovenvaikutusluku” koostuu tilastollisesta koon vaikutuksesta ja jännitysgradientin vaikutuksesta. Jälkimmäisen vaikutus on pieni kohtuullisen tylpille loville. Määritelmää ”tylpälle” ja ”terävälle” lovelle ei valitettavasti pysty antamaan: asia riippuu paitsi lovenmuotoluvusta myös kappaleen fyysisestä koosta: katso lähemmin luvusta 10.

Lovikohtien kriittinen pinta-ala on pieni, pienempi kuin koesauvojen, jolloin tilastollinen koon vaikutus ennustaa väsymislujuudelle korkeampaa arvoa kuin koesauvalle. Tämä vaikutus voidaan nytkin arvioida kuvion 13 avulla. Ongelmana vain on, että joudutaan aina laskemaan tehollinen jännityspinta-ala muuttuvan jännityksen takia. Sitä varten on määritettävä jännitys jakauma loven alueella.

Missään käsikirjassa ei kerrota, pitääkö koon vaikutuksen kerrointa käyttää ison kappaleen lovikohtillekin. Vastaus on, että ei pidä. Koon vaikutuksessa ja lovenvaikutuksessahan on kyse samasta ilmiöstä, tilastollisesta koon vaikutuksesta. Suurelle osalle kriittinen jännitys sen johdosta alenee koesauvaan verrattuna, pienelle detaljille taas kasvaa, koska tehollinen pinta-ala on tavallisesti pienempi kuin koesauvassa. Teknologiset vaikutukset pitää tietenkin huomioida loville yhtä lailla kuin sileillekin kappaleille.

Edellä olevat kommentit huomioiden väsymisrajan laskenta jännitys-venymämenetelmällä onnistuu kohtalaisella tarkkuudella, väsymisiän arviointi äärellisen kestoian alueella sen sijaan on arpapeliä.



## 4 VENYMÄ-ELINIKÄ-KÄYRÄT

Tärkein syy venymä–elinikämenetelmän kehittämiseksi on ollut jännitys–elinikämenetelmän huono käytettävyys lovellisille osille. Kuitenkin valtaosa väsymisvaurioista tapahtuu tällaisista kohdista. Perusajatus on, että osa vaurioituu, kun venymänvaihtelu ylittää koesauvalla saadun kriittisen venymänvaihtelun arvon. Kriittisen venymänvaihtelun käyrä saadaan normaalilla sileän koesauvan kokeella ja nyt tehdään oletus, että lovikohdan kriittinen paikallinen venymä vastaa sileän sauvan venymää kokeessa. Menetelmää kutsutaan sen vuoksi myös paikallisen venymän menetelmäksi.

### 4.1 Venymä–elinikä–menetelmän perusteet

Venymä–elinikä–käyrän piirtämiseksi on tunnettava syklinen jännitys–venymä–käyrä. Se esitetään Ramberg – Osgoodin yhtälöllä:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (3)$$

missä

$\varepsilon_a$  = kokonaisvenymäamplitudi

$\varepsilon_e$  = elastinen venymäamplitudi

$\varepsilon_p$  = plastinen venymäamplitudi

$E$  = kimmokerroin

$K'$  = syklinen lujittumiskerroin

$n'$  = syklinen lujittumiseksponentti

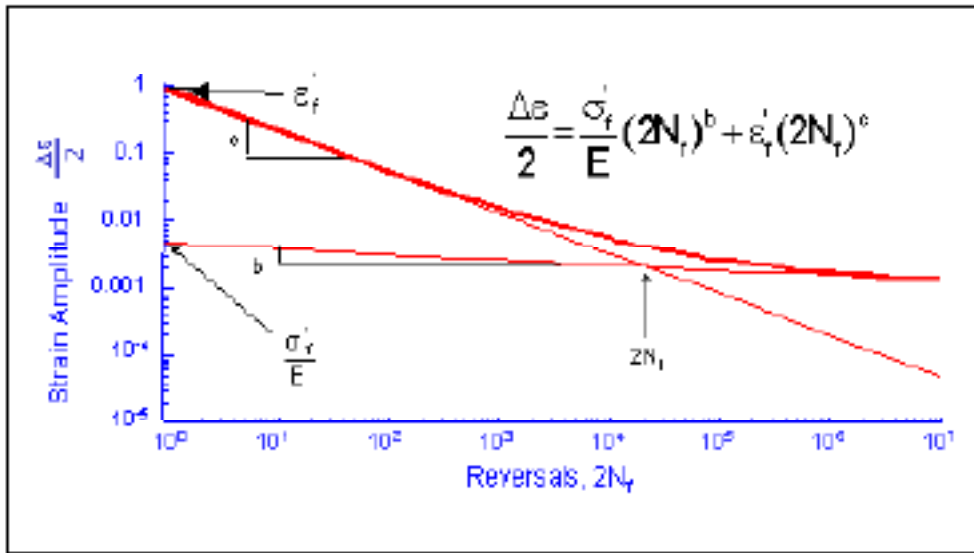
$\sigma_a$  = jännitysamplitudi

Yhtälössä on huomionarvoista se, että sen mukaan venymästä on aina pieni osa plastista. Tästä seuraa, että kun koetulosten avulla piirretään venymä–elinikä–käyrä, siinä ei ole vaakasuoraa osaa. Tämä taas tarkoittaa, että menetelmän mukaan väsymisrajaa ei ole. Saatava elinikäkäyrä voidaan esittää yhtälön muodossa seuraavasti:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} \cdot (2N_f)^b + \varepsilon'_f \cdot (2N_f)^c \quad (4)$$

- missä  $\Delta \varepsilon$  = venymänvaihtelu
- $\sigma'_f$  = väsymislujuskerroin
- $N_f$  = kuormanvaihtoluku
- $\varepsilon'_f$  = väsymissitkeyskerroin
- $b$  = väsymislujusekspONENTTI
- $c$  = väsymissitkeysekspONENTTI

Laskentakaavassa tarvittavia parametreja on määritetty suuri joukko Boller-Seegerin käsikirjoissa, esim. [4]. Alla olevassa kuviossa on esimerkki venymä–elinikä–käyrästä.



**Kuvio 7.** Erään teräksen venymä–elinikä–käyrä [6].

#### 4.2 Venymä–elinikämenetelmän arviointia

Tälläkin menetelmällä saatu elinikäarvio sisältää sekä särön ydintymisen että särönkasvun, joten siihenkin liittyy samoja ongelmia kuin Wöhlerin menetelmään. Menetelmää suositellaan yleensä käytettäväksi vain äärellisen kestoian alueella, jotkut

suosittelevat sitä vain tapauksille, joissa ydintymisen osuus väsymisiästä on hallitseva (yleensä siis pienille kappaleille) [6]. Menetelmää on sovellettu myös niin, että sillä arvioidaan vain särön ydintymisikä ja kasvuikä lasketaan erikseen murtumismekaanikalla.

Pitkän kestoian alueella menetelmän soveltamisessa on ongelmia. Siitä saadaan aina äärellinen kestoikä, koska väsymisrajaa sen mukaan ei ole. On kylläkin olemassa viitteitä, että tämä saattaa pitää paikkansakin, jolloin jännitys–elinikäkäyrienkin vaaka-suora osa olisi tosi asiassa hiukan kalteva. Hyvin suurille kuormanvaihtoluvuille on olemassa hyvin vähän tuloksia eikä varmuutta asiasta ole. Joka tapauksessa kaltevuus lienee niin loiva, että asialla on merkitystä vain poikkeuksellisen suurilla kuormanvaihtoluvuilla ( $N \gg 10^8$ ).

Boller-Seegerin käsikirjoissa laaditut käyrät perustuvat monesti hyvin pieneen koemäärään ja kokeita on tehty vain pienille kuormanvaihtoluvuille. Siksi varsinkin pitkän kestoian alue on hyvin epätarkka, koska kaltevuus  $b$  (ks. kuvio 7) voi heittää paljonkin.

Paikallisen venymän menetelmän yhteydessä ei ole käsikirjoissa esitetty korjauskerroimien käyttöä Wöhlerin menetelmän tapaan. Ei liene kuitenkaan syytä, miksei samanlaisia korjauskertoimia voisi käyttää (ks. luku 3.5).

Menetelmä antaa saman tuloksen kahdelle erikokoiselle lovelliselle osalle, joille lovenmuotoluku on sama eikä siis huomioi kappaleen kokoa. Siksi tilastollinen koon vaikutus sekä jännitysgradientin vaikutus tulisi arvioida erikseen tässäkin.

Keskijännityksen huomioonottamiseen käytetään paikallisen venymän menetelmän yhteydessä usein Smith-Watson-Topper-parametria:

$$P_{SWT} = \sigma_{max} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2} \quad (5)$$

Kaava kertoo, että tapauksille, joille parametri  $P_{SWT}$  on sama, väsymislujuus on sama. Jos keskijännitys väsytykskoeksessa on ollut nolla ( $R = -1$ ), on  $\sigma_{max} = \Delta\sigma/2$ . Jos keskijännitys on korkeampi,  $\sigma_{max}$  on suurempi ja kriittinen venymäamplitudi alenee vastaavasti. Tämän menettelyn käyttö johtaa kuitenkin siihen, että kriittinen venymäamplitudi on ratkaistava iteroimalla [6].

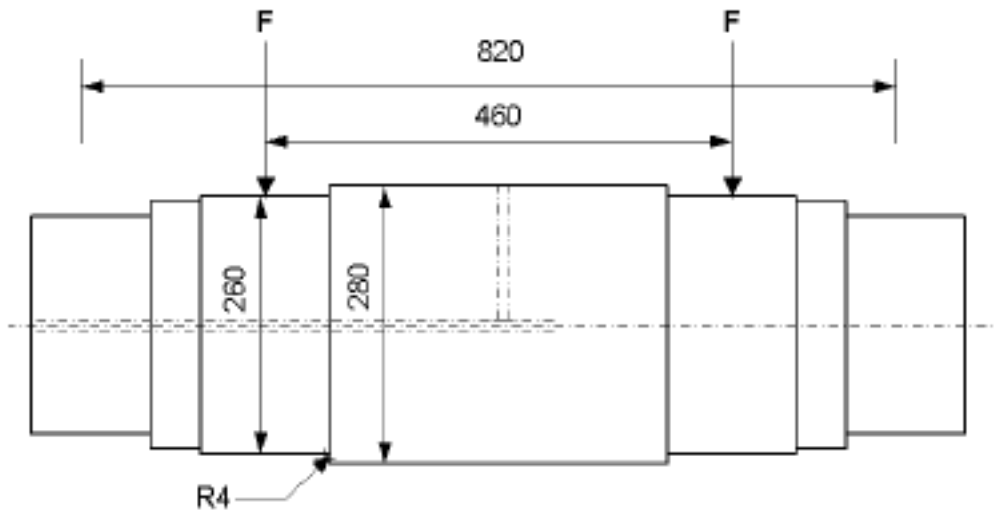


## 5 PERINTEISTEN MENETELMIEN RISKIT

### 5.1 Käytännön tapaus

Tarkastellaan alla olevan piirustuksen esittämää järeää akselia (esimerkki perustuu löyhästi todelliseen tapaukseen). Tukilaakerit ovat mitan 820 osoittamissa paikoissa. Kuormien suuruudet ovat  $F = 720 \text{ kN}$ . Akselin pyörimisnopeus on niin suuri, että mitoitus on tehtävä väsymisrajan mukaan. Materiaali on tavallista rakenneterästä S235.

Kirjallisuudesta löydettiin taivutusvaihtolujuuden arvoksi  $\Delta\sigma_{R,rb} = 360 \text{ MPa}$ . Kriittisimmiksi kohdiksi todettiin säteittäinen rasvareikä  $\varnothing 4 \text{ mm}$  sekä olake R4 mm.



Kuvio 8. Esimerkkiakseli.

Lovenmuotoluvut ovat: rasvareikä  $K_t = 3,0$ , olake  $K_t = 2,85$ . Loviherkkyysluvut laskettiin Petersonin kaavalla:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\rho}} \quad (6)$$

missä

$a = \text{vakio} = 0,01 \text{ in}$   
 $\rho = \text{loven säde.}$

Tässä tapauksessa molemmille saadaan sama arvo  $q = 0,94$ . Kaavasta ( 2 ) saadaan lovenvaikutusluvut: rasvareikä  $K_{yf} = 2,82$ , olake  $K_{yf} = 2,68$ .

Taivutusmomentti molempien lovien kohdalla on  
 $M = 720\text{kN} \cdot 180 \text{ mm} = 129600 \text{ Nm}$ .

Nimellisjännityksiksi saadaan:

rasvareikä  $\Delta\sigma_{\text{nom}} = 60,0 \text{ MPa}$ , olake  $\Delta\sigma_{\text{nom}} = 75,0 \text{ MPa}$ .

Lovijännitykset ovat:

rasvareikä  $\Delta\sigma_{\text{max}} = 169,4 \text{ MPa}$ , olake  $\Delta\sigma_{\text{max}} = 201,2 \text{ MPa}$ .

Sallituissa jännityksissä on otettava huomioon, että väsymislujuus on keskimääräinen arvo, joten se on kerrottava luotettavuuskertoimella, joksi saatiin  $k_R = 0,92$ . Lisäksi on huomioitava pinnanlaatukerroin. Poratulle reiälle tilanne on epäselvä, käytettiin arvoa  $k_s = 0,8$ . Olake on hiottu  $R_a$ -arvoon 0,8, jolle  $k_s = 0,97$ . Saadaan siis sallitut jännitysheilahdukset:

- rasvareikä:  $\Delta\sigma_{\text{sall}} = 0,8 \cdot 0,92 \cdot 360 = 265 \text{ MPa}$
- olake:  $\Delta\sigma_{\text{sall}} = 0,97 \cdot 0,92 \cdot 360 = 321,2 \text{ MPa}$

Varmuusluvut ovat siten:

- rasvareikä:  $n = 265 / 169,4 = 1,56$
- olake:  $n = 321,2 / 201,2 = 1,6$ .

Käytännössä esikuvana olevista akseleista katkesi iso osa noin  $10^7$  kuormanvaihdon kohdalla. Murtumista yksikään ei tapahtunut rasvareian kohdalta, vaan olakkeesta.

Tilannetta analysoitaessa huomio kiinnittyi pian väsymislujuuden arvoon. Tässä tulittiin ensimmäiseen tärkeään johtopäätökseen: väsymiskokeet on tehty pienillä sauvoilla, joiden staattinen lujuus on korkeampi kuin käytännön komponenttien. **Väsymislujuutta on alennettava todellisen murtolujuuden suhteessa** (ns. teknologinen koon vaikutus). Todellista murtolujuutta on kuitenkin vaikea todentaa: terästehtaat eivät takaa sitä, ainoastaan myötölujuuden. Taatun myötölujuuden perusteella arvioitiin, että todellinen murtolujuus saattoi olla 1,5 kertaa alempi kuin koesauvan. Tämäkin huomioituna laskennalliset varmuusluvut olivat silti kaikissa tapauksissa vieläkin selvästi yli yhden. Asiaan palataan luvun 9.4 lopussa.

## 5.2 Ajatuksia herättäviä tutkimustuloksia

Kuvio 9 esittää laajaa koesarjaa väsymiskokeita. Sauvat ovat yksinkertaisesti eripituisia langan pätkiä. Kukin sarja käsittää 50 koetta, joten tilastollinen merkitsevyys on harvinaisen suuri. Kuvioista nähdään, että tällaisissakin koekappaleissa näkyy erittäin selvä koon vaikutus. Lyhimpien sauvojen (koestusmitta 5 mm) keskimääräinen elinikä on lähes 1,6 kertaa niin pitkä kuin pisimpien (70 mm). **Edellä käsitellyt perin-**



teiset mitoitusmenetelmät eivät pysty ennustamaan tällaista käyttäytymistä. Niiden mukaan väsymislukujuuksien tulisi olla täsmälleen samat!

Kun ajatellaan, että väsytykokeet tehdään yleensä tätä kokoluokkaa olevilla koesauvoilla, herääkin kysymys: jos näin pienten kappaleiden välillä on noin suuret erot, mikä on ennustettavuus edellisessä luvussa lasketun akselin suuruusluokkaa oleville komponenteille?

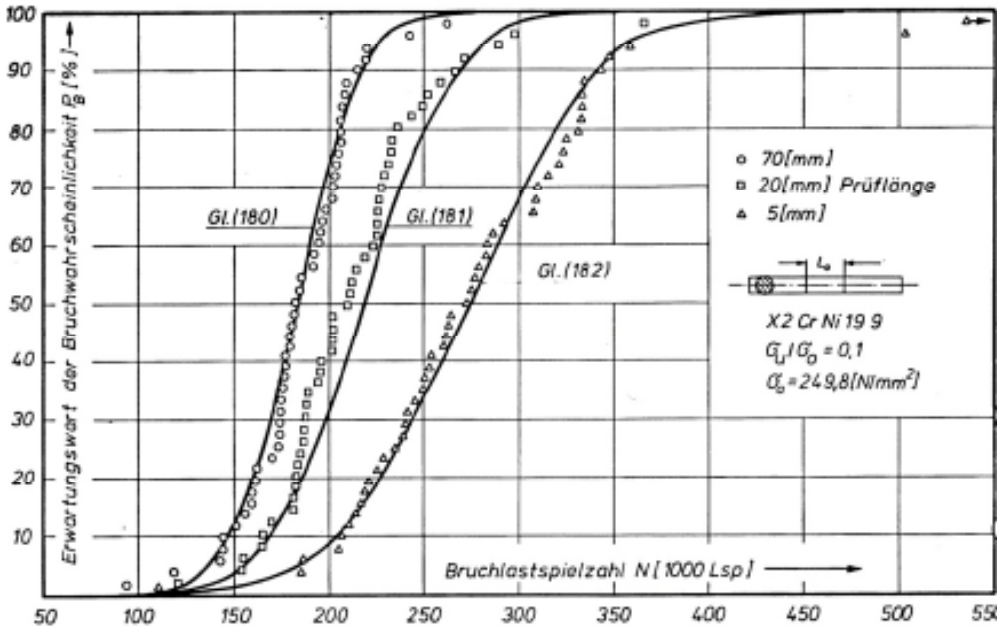


Bild 28: Bruchwahrscheinlichkeit unpolierter Rundproben in Abhängigkeit der Bruchlastspielzahl bei gleicher Ausschlagsamplitude

**Kuvio 9.** Eripituisten sauvojen väsymisiä todennäköisyyspiirroksena [7, 127]

### 5.3 Alustavia johtopäätöksiä

Edellä selostettujen esimerkkien tarkoituksena on osoittaa, että perinteisiä (ns. deterministisiä) menetelmiä käytettäessä väsymislukuuden arviointiin sisältyy suuria riskejä. Arviot poikkeavat oikeasta satunnaisesti ja saattavat olla joskus huomattavan epäkonservatiivisia. Eroavuudet voi selittää ainoastaan tilastollisilla ilmiöillä.

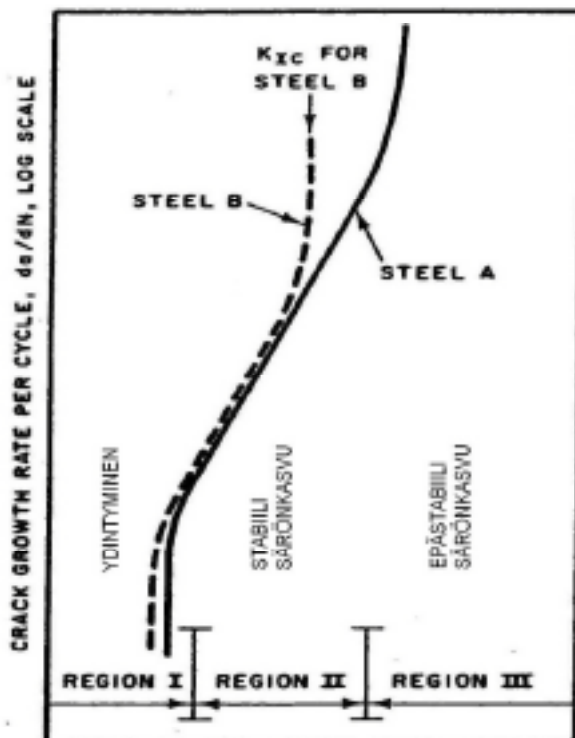
Edellisessä luvussa esitettyjen koesauvojen tapauksessa stabiilin särönkasvuiän täytyy olla sama (tai ainakin melkein sama). Väsymisikien erojen täytyykin syntyä ydintymisvaiheessa. Ydintymisen todetaankin siten olevan suurelta osalta tilastollinen prosessi.

Stabiili särönkasvu taas voidaan mallintaa hyvällä tarkkuudella seuraavassa luvussa kerrotulla tavalla.



## 6 MURTUMISMEKANIikka

Luvussa 2.2 esitettiin stabiilin särönkasvun karkea mekanismi. P. C. Paris kehitti 1960 – luvulla laskentamallin, jota on alettu kutsua nimellä lineaarielastinen murtumismekaniikka (LEFM). Särön kasvu voidaan alla olevan kuvan mukaan jakaa kolmeen vaiheeseen: ydintyminen, stabiili särönkasvu ja epästabiili särönkasvu (huomaa, että kuvion asteikko on logaritminen). Viimeinen vaihe edeltää loppumurtumaa ja on hyvin nopea. Se voidaan elinikä-laskelmissa jättää huomiotta.



Kuvio 10. Periaatteellinen särönkasvukäyrä [21, 235]

Stabiili särönkasvu voidaan laskea käyttäen Parisin lakia:

$$\frac{da}{dN} = C_0 \cdot \Delta K^m \quad (7)$$

missä

$\Delta K$  = jännitysintensiteettikertoimen vaihtelu  
 $C_0, m$  = Parisin lain materiaalivakiot.

Jännitysintensiiteettikertoimen lauseke on muotoa

$$\Delta K_I = \beta \cdot \Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (8)$$

Geometriakerroin  $\beta$  riippuu kappaleen muodosta, särön muodosta sekä jännitysja-  
kaumasta. Sen arvoja löytyy nykyään hyvin paljon kirjallisuudesta.

Särönkasvuikä saadaan lasketuksi integroimalla lauseke ( 7 ):

$$N = \int_{a_i}^{a_f} da \frac{1}{C_0 \cdot \Delta K^m} \quad (9)$$

## 7 ÄÄRIARVOTEORIAN PERUSTEITA

Kuten edellä perusteltiin, väsymismitoituksessa on sovellettava tilastollisia menetelmiä. Se tilastomatematiikan haara, johon päädytään, on nimeltään ääriarvoteoria. Seuraavalla esimerkillä valaistaan sen käyttöä ja ongelmia.

Kuvitellaan, että kaivamme soraa Salpausselän harjusta. Jostakin syystä meitä kiinnostaa, mikä on suurin lohkare, mikä todennäköisesti osuu erikokoisiin otoksiin (kottikärryllinen, autokuorma...). Ensimmäinen on tunnettava harjun partikkelikokojakauma. Oletetaan sen noudattavan Weibull-jakaumaa, jonka kertymäfunktio on seuraavan näköinen:

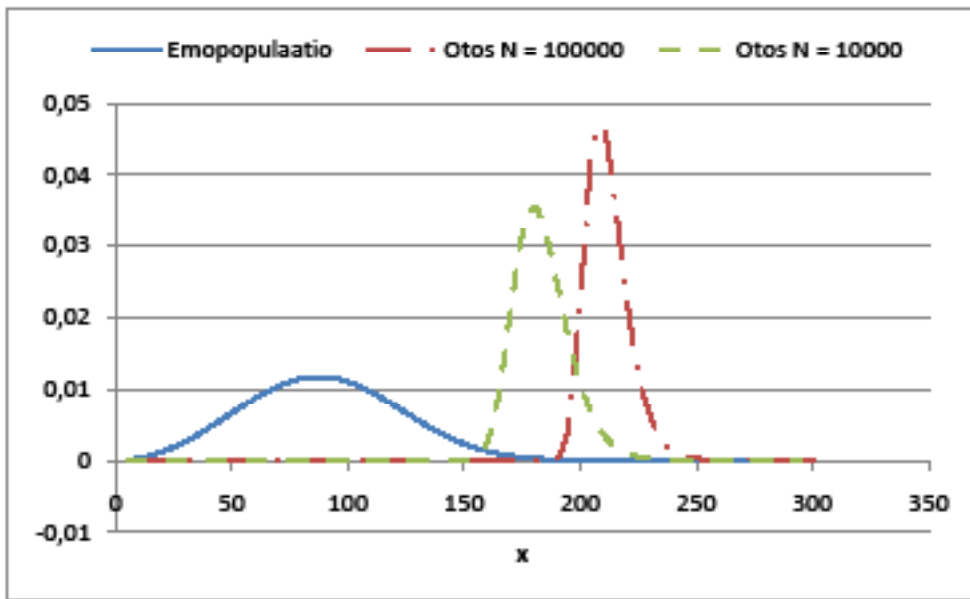
$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{x_v-x_0}\right)^k} \quad (10)$$

Tiheysfunktio on:

$$f(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_v-x_0}\right)^k \cdot \frac{k}{x-x_0} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{x_v-x_0}\right)^k} \quad (11)$$

Kaaviossa:  
 $k$  = muotoparametri  
 $x_v$  = skaalausparametri  
 $x_0$  = sijaintiparametri

Jakauma voi näyttää esimerkiksi siltä kuin kuvioon 11 on piirretty: partikkelijakauma on kuviossa vasemmanpuoleisin). Pieniä kiviä on paljon ja suurempien todennäköisyys laskee asymptoottisesti nollaa kohti. Jakauma rajautuu tietysti vasemmalta nollaan, negatiivisia arvoja ei voi esiintyä.



**Kuvio 11.** Salpausselän partikkelijakauma ja kahden otoksen suurimman lohokareen koon jakaumat

Nyt haluamme ennusteen kottikärryllisestä ja auton lavallisesta todennäköisesti löytyvälle suurimmalle lohokarekoolle. Otoksen, jonka suuruus on  $n$  kpl, suurimman alkion ennusteelle on johdettu seuraavat lausekkeet:

- kertymäfunktio:

$$F_{X_{n:n}}(x) = F^n(x) \tag{12}$$

- tiheysfunktio:

$$f_{X_{n:n}}(x) = n \cdot F^{n-1}(x) \cdot f(x) \tag{13}$$

Kaavoissa  $n$  on siis kunkin kokoisen kuorman partikkelien lukumäärä. Jos oletetaan, että kottikärryyn mahtuu  $n = 100000$  partikkelia ja auton lavalle  $n = 1000000$ , saadaan kuvioon 11 piirretyt jakaumat. Ennuste eli odotusarvo saadaan jakaumien keskiarvona. Kottikärryllisestä näillä arvoilla löytyy keskimäärin korkeintaan  $n. 180$  mm kivi ja auton lavalta  $n. 220$  mm kokoinen. Huomataan siis, että otoskoon kasvaessa odotusarvo kasvaa ja samalla hajonta pienenee, mikä onkin loogista.

Käytännön työssä tällaisten ennusteiden tekemisessä törmätään aina ongelmiin. Kukaan ei pysty tarkasti tietämään, minkälainen Salpausselän harjun tarkka jakauman muoto on. Voidaan helposti päätellä, että Weibull-jakauma on hyvä ehdokas: suurin osa on pieniä jyväsia, isoja on vähemmän, ja ennen kaikkea jakauma on kokonaan positiivisella puolella. Ei myöskään tiedetä, kuinka monta partikkelia kottikärryllisessä tai auton lavallisessa on. Tällaisista puutteista huolimatta melko hyviä ennusteita on mahdollista saada keräämällä pohjatietoa eri tavoin. Harjusta voidaan esimerkiksi ottaa suuri joukko vaikkapa ämpärillisen kokoisia näytteitä ja määritellä niistä partikkelijakauma sekä seuloa esiin suurin kivi kustakin ämpärillisestä. Partikkelijakauman muoto sovitetaan sitten tehtyihin mittauksiin. Myöhemmin huomataan, että väsymislujuuteen sovellettaessa joudutaan samankaltaisiin ongelmiin.

Edellä mainittujen pulmien kiertämiseksi on melko hiljattain kehitetty menetelmä, joka periaatteessa näyttää hyvin houkuttelevalta. Se perustuu yleistetyn ääriarvojakauman käyttöön (generalized extreme value, GEV). On huomattu, että otoskoon kasvaessa otoksen maksimin jakauma lähestyy tiettyä rajajakaumaa, joita on kolme erilaista eri tyyppin populaatiojakaumille. GEV-funktiossa nämä on saatu yhdistettyä yhdeksi. Monesti otokset ovat suuria niin kuin edellä olevassa esimerkissä ja voidaan otaksua niiden olevan riittävän lähellä ääretöntä. Näiden syiden vuoksi *GEV:tä käytettäessä ei tarvitse tietää satunnaismuuttujan jakaumaa eikä otoskokoja*. Tarvitaan vain riittävä joukko havaintoja (Salpausselkä-tapauksessa ämpärillisten seulontatulokset), joihin GEV-funktio sovitetaan. Saadulta käyrältä voidaan sitten lukea ennusteet erikokoisten otoksien maksimiarvoille. Menetelmää ei kuitenkaan esitellä tässä kirjoituksessa tarkemmin seuraavista syistä:

- Kirjoittajan kokemuksen mukaan GEV:llä saa huonommat ennusteet pienille kappaleille [13]. Syynä on ilmeisesti juuri se, että GEV-funktio on johdettu hyvin suurille otoksille (Salpausselän esimerkkitapauksessa menetelmä sen sijaan toimisi luultavasti hyvin, koska otokset ovat suuria).
- GEV-sovitukseen tarvitaan erityinen tilastomatemattinen ohjelmisto (MathLab, R). Nämä eivät ole käytettävyydeltään mitään jokamiehen ohjelmia. Lisäksi ohjelmat näyttävät antavan keskenään hieman eroavia tuloksia.

Kiinnostuneita kehotetaan tutustumaan esim. lähteeseen [14].

Murakami on soveltanut GEV:tä omassa menetelmässään: ks luku 8.2.





## 8 TILASTOLLISIA MENETELMIÄ VÄSYMISRAJAN ENNUSTAMISEEN

Tilastollisten menetelmien käyttäminen väsymislujuuden ennustamiseen ei ole mikään uusi keksintö: ehdotuksia on esitelty ainakin 1940-luvulta lähtien. Jostakin syystä menetelmät eivät ole vallanneet suuremmin alaa: ehkäpä tilastollinen ajattelu on insinöörielle liian vieras.

Tässä luvussa esitellään kaksi menetelmää. Böhmin menetelmä siksi, että se näyttää antavan hyviä tuloksia, Murakamin menetelmä siksi, että se on laajimpaan käyttöön levinnyt. Kirjoittajan kehittämä menetelmä esitellään sitten tarkemmin luvuissa 9 - 12.

### 8.1 Böhmin menetelmä

Ruotsalaisen W.Weibullin menetelmä on ensimmäinen tilastomatemattinen lähestymistapa väsymislujuuteen. Ensimmäiseksi sitä lienee kuitenkin käytetty hyvin hauraiden aineiden (lasin) murtumisen ennustamiseen. Menetelmä perustuu heikoimman lenkin periaatteeseen. Ajatellaan, että kappale koostuu pienistä elementeistä ja se elementti, jolla on huonoin lujuus, määrää kappaleen lujuuden. Menetelmässä siis enustetaan otoksen minimiä toisin kuin luvun 7 esimerkissä, jossa haettiin maksimia. Menettely on kuitenkin periaatteessa samanlainen.

Böhmin menetelmä pohjautuu Weibullin menetelmään. Siinä haetaan rajajakauma, jota otoksen minimi noudattaa otoksen koon kasvaessa rajatta. Se on siten GEV-menetelmän sukulainen tai edeltäjä (ks. seuraava luku). Ensin Böhm osoittaa, että tietyn kokoisen kappaleen murtumistodennäköisyys eri jännitystasoilla on:

$$P_B(\sigma) = 1 - e^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_v}\right)^k} \quad (14)$$

Kaavassa  $\sigma_v$  ja  $k$  ovat todennäköisyysjakauman parametrit. Ne on haettava kokeellisesti sovittamalla väsymiskokeiden tuloksiin. Jos oletetaan, että yllä oleva lauseke vastaa pinta-alaltaan  $A_0$ :n suuruista kappaletta, pinta-alaa  $A$  vastaavan kappaleen murtumistodennäköisyys saadaan kaavasta:

$$P_B(\sigma) = 1 - e^{-\left(\frac{A \sigma}{A_0 \sigma_v}\right)^k} \quad (15)$$

Kahden erikokoisen sauvan väsymislujuuksien suhteelle Böhm johtaa lausekkeen:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (16)$$

Böhm johtaa väitöskirjassaan kaavat, joilla voidaan huomioida muuttuvan jännitys-jakauman vaikutus. Böhm kutsuu sitä jännitysintegraaliksi. Käytännössä jännitys-jakauman funktiota ei usein tunneta, vaan jännitys jakauma on määritettävä FEM-mallin avulla. Böhm on laatinut ohjelman, jolla jännitysintegraali voidaan laskea likimääräisesti.

Böhmin tulokset on esitelty myös lähteessä [11]. Tulokset ovat erittäin hyviä sekä si-leille että lovellisille koekappaleille, vaikka kirjoittaja esittää menetelmälle mm. seu-raavaa kritiikkiä:

- Pienille loville rajajakauman olettamus hyvin suuresta otoskoosta ei voi pitää paik-kaansa (korkean jännityksen alainen pinta-ala vain millimetriluokkaa!)
- Jännitysgradientin vaikutus jätetään huomiotta.

Mahdollisesti jälkimmäisen vaikutus kompensoituu jollain tavalla rajajakaumaa käy-tettäessä. Sitä, päteekö tämä aina, ei voi varmuudella sanoa.

Böhm on laskenut koetuloksista todennäköisyysjakauman parametrit jokaiselle koesauvamuodolle. Hän käyttää laskelmissaan saatujen parametrien keskiarvoa. Eri koesauvojen parametrien arvoissa on melko paljon hajontaa. Syynä voi olla edellä mainittujen lisäksi se, että kaikkein terävimpien lovien pohjalla on jo melko suuri plastisen muodonmuutoksen osuus. Tämä muuttaa sauvan väsymiskäyttäytymistä: ks. kommentit luvun 10 lopussa.

## 8.2 Murakamin menetelmä

Lähtökohta Murakamin menetelmässä on, että hän on havainnut korkealujuuksisten terästen väsymisrajan olevan laskettavissa seuraavalla kaavalla:

$$\sigma_w = 141 \cdot \frac{(H_v + 120)}{\sqrt{area}} \quad (17)$$

missä

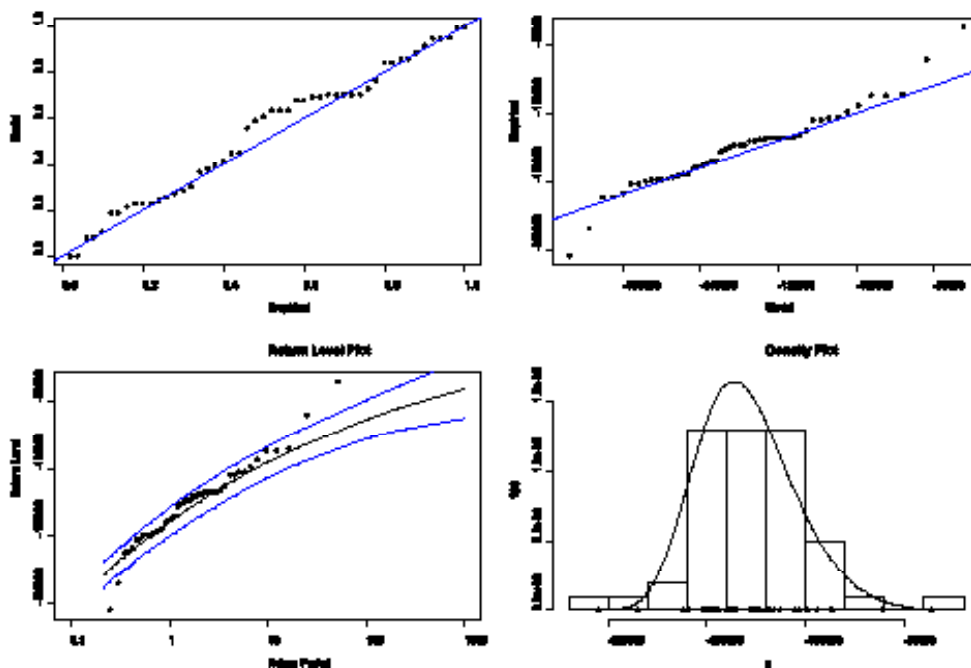
$H_v$  = teräksen Vickers-kovuus

$area$  = kappaleesta löytyvän suurimman sulkeuman projektiopinta-ala

Suurimman sulkeuman koko täytyy ennustaa tilastollisesti. Ennustamiseen käytetään GEV-funktiota. Funktion sovittamiseen tarvitaan kokeellisia havaintoja. Ne saadaan siten, että ko. materiaalista tehdään hieitä. Hieistä valitaan pieniä tasakokoisia näytteitä, joista haetaan ja mitataan suurimman sulkeuman koko. GEV-jakauma sovitaan näihin. Sen jälkeen voidaan saada erikokoisille kappaleille ennuste suurimmasta vikakoosta ja väsymisraja saadaan sitten sen avulla kaavasta (17).

GEV-menetelmä perustuu rajajakauman käyttöön: ks. kuvausta luvun 7 lopussa. Menetelmä on sikäli houkutteleva, että emopopulaation todellista jakaumaa eikä otoskokoja tarvitse tuntea. Kun on riittävän edustava määrä kokeellisia tuloksia (tässä tapauksessa hieistä haetut suurimmat sulkeumakoot), voidaan tuloksiin sovittaa tilastomatematiikkaohjelmistolla GEV-jakauma. Sen jälkeen tulostetaan ns. return period-kuvaaja. Tästä kuvaajasta voidaan suoraan lukea erikokoisille kappaleille sattunaismuuttujan maksimin ennusteet. Alla on esimerkki R-ohjelmiston avulla tulostetuista kuvaajista.

Huomautetaan, että kuvaajaa kutsutaan return period-nimellä siksi, että tätä menetelmää on eniten käytetty sääilmiöiden ennustamisessa. Ennustetaan esim. millä ajanjaksolla toistuu tietyn tuulen nopeuden ylittävä myrsky.



**Kuvio 12.** Esimerkki GEV-jakauman todennäköisyyskäyrästä [13, 13].



## 9 VÄSYMISRAJAN TILASTOLLINEN ENNUSTAMINEN

Tässä luvussa esitellään kirjoittajan kehittämä menetelmä väsymisrajan ennustamiseen ([11], [12], [3]). Pohjana on se fakta, että dynaamisesti kuormitetun kappaleen pinta on pian täynnä mikrosäröjä. Säröjen määrä on valtava, luokkaa kymmeniä per  $\text{mm}^2$ . Ajatellaanpa tilannetta kuvan 1 säröjen ydintymismallin perusteella. Mitä suurempi kappale (eli mitä suurempi jännityksen alainen pinta-ala), sitä suurempi on todennäköisyys sille, että löytyy pitkiä ketjuja, joissa rakeiden liukutasot ovat epäedullisesti suuntautuneet. Toinen särökokoihin vaikuttava tekijä on tietenkin sulkeumien ja muiden epäpuhtauksien ja virheiden jakauma: sekin on satunnaissuure ja suuressa kappaleessa isojen vikojen esiintyminen on todennäköisempää.

Suurimmalle löytyvälle särökoolle erikokoisissa kappaleissa voidaan laskea ennuste ääriarvoteoriaa hyväksi käyttäen. Kaavan ( 8 ) avulla voidaan sen jälkeen laskea, mikä on kappaleen väsymisluku.

Menetelmä on siten Murakamin menetelmän ohella ainoa, joka pohjautuu todelliseen, fyysikaaliseen suureeseen, mikä antaa sille erityistä uskottavuutta.

### 9.1 Tilastollisen mitoituksen ongelmat ja niiden kiertotiet

Menetelmän ongelmana on, että mikrosäröjen jakaumia ei ole käytettävissä. Samoin tarkka säröjen määrä per pinta-alayksikkö ei ole tarkasti tiedossa. Väitöskirjassaan [11] kirjoittaja on osoittanut, että laskentatulokset ei ole herkkä näissä asioissa tehdyille virheille. Niinpä voidaan toimia järkevien olettamusten pohjalta. Mikrosäröjen jakaumaksi voidaan olettaa Weibull tai log-normaali. Molempien muoto on samantapainen kuin kuviossa 11. Pieniä säröjä täytyy olla paljon ja suurimpien todennäköisyys alenee asymptoottisesti. Väitöskirjassa laskelmat tehtiin kahdella säröjen määrän olettamuksella: 10 per  $\text{mm}^2$  ja 100 per  $\text{mm}^2$ . Erot tuloksissa olivat lähes merkityksettömiä. Vaikeudet ovat siis samat kuin aiemmin Salpausselän kivikokojen ennustamisessa.

Säröjen määrä kohdekappaleessa eli otoskoko voidaan laskea jännityksen alaisen pinta-alan avulla, kun valitaan käyttöön arvio säröjen määrästä: 100 per  $\text{mm}^2$  on sopivan pyöreä luku. Jakaumaksi voidaan olettaa Weibull, jota paljon käytetään luotettavuusanalyyseissä. Lähteessä [12, 397] kirjoittaja on vertaillut Weibull-jakaumaa eräissä tutkimuksissa mitattuun mikrosäröjakaumaan. Vastaavuus on varsin hyvä. Sitten on vielä kysymys: kuinka asetetaan jakauman parametrit oikeiksi? Se voidaan tehdä kiertäen väsytyksokeiden avulla. Täytyy siis olla käytettävissä yksi referenssikoesarja. Jakauman parametrit haetaan siten, että koesauvan pinta-alaa vastaavan otoskoon ennuste tulee samaksi kuin kokeista saadut arvot (väsymislajuuden keskiarvo ja hajonta). Sovitustyötä varten täytyy käytössä olla sopiva matemaattinen ohjelmisto. Kirjoittaja on käyttänyt tähän MathCad-ohjelmaa. Prosessi on kuvattu lähteissä [11] ja [12].

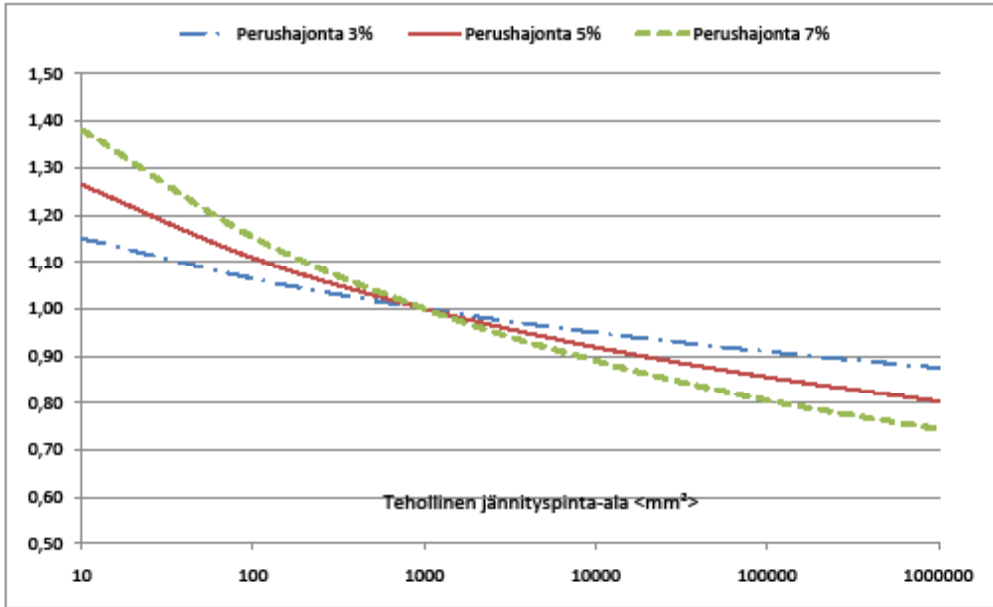
## 9.2 Tilastollisen koon vaikutusluvun määrittäminen

Käytännön mitoitustyötä varten kannattaa tehdä etukäteen valmiit mitoituskäyrät. Kuvio 13 esittää kirjoittajan kehittämää mahdollista mallia. Kuten kuviosta nähdään, koon vaikutus riippuu siitä, kuinka suuri ko. materiaalin väsymislujuuden hajonta on. Kuvaan on peruspisteeksi valittu kappalekoko, jolla jännityksen alainen pinta-ala on 1000 mm<sup>2</sup>: siinä koon vaikutus on 1,0. Kuvioon on piirretty kolme käyrää, joissa peruspisteen kohdalla hajonnat ovat 3, 5 ja 7 %. Väsymislujuuksien hajonnat osuvat yleensä tähän haarukkaan. Muun kokoisten komponenttien väsymislujuus saadaan kertomalla koon vaikutusluvulla. Tämä saadaan käyrältä, jolla hajonta-arvo on koetuloksia vastaava. On pidettävä mielessä, että hajonta kasvaa tilastollisen vaikutuksen takia kappalekoon pienentyessä ja päinvastoin. Niinpä on valittava sellainen käyrä, jolta *referenssitestissä käytetyn kokoisen sauvan* hajonta on sama kuin valitulla käyrällä. Jotta tämä vertailu voidaan tehdä, on alla olevaan taulukkoon määritetty kerroin, josta saadaan koon vaikutuksesta johtuva hajonnan muutos eri käyrillä.

**Taulukko 1.** Hajontakertoimet erikokoisille kappaleille.

<b>Tehollinen pinta-ala mm<sup>2</sup></b>	<b>Hajontakerroin</b>
<b>10</b>	<b>1,6</b>
<b>100</b>	<b>1,23</b>
<b>1000</b>	<b>1,0</b>
<b>10000</b>	<b>0,84</b>
<b>100000</b>	<b>0,73</b>
<b>1000000</b>	<b>0,64</b>

Oletetaan esimerkiksi, että väsytyksoikeet on tehty sauvoilla, joiden pinta-ala on 100 mm<sup>2</sup> ja kokeissa havaittu hajonta on ollut 6 %. Keskimmaisella käyrällä 1000 mm<sup>2</sup> kappaleen hajonta on 5 % (= perushajonta). 100 mm<sup>2</sup> kokoiselle hajonta samalla materiaalilla olisi taulukon mukaan  $5 \times 1,23 = 6,15$  %. Se on niin lähellä kokeissa saatua arvoa, että voidaan käyttää keskimmäistä käyrää. Sen mukaan 1000 mm<sup>2</sup> kappaleen väsymislujuus on n. 12 % matalampi kuin kokeessa käytetyn sauvan. Siitä saadaan väsymislujuuden perusarvo ja käyrältä haetaan koon vaikutusluku erikokoisille kappaleille.



**Kuvio 13.** Tilastollinen koon vaikutusluku eri hajonnan arvoilla.

### 9.3 Tehollinen jännityspinta-ala

Edellä todettiin, että tilastollinen koon vaikutus riippuu kappaleen jännityksen alaisesta pinta-alasta. Mutta entäpä jos jännitys muuttuu kappaleen mitalla? Itsestään selvää on, että vaurioitumistodennäköisyys laskee jännityksen aletessa. Tämän huomioimiseksi pitää ottaa käyttöön *tehollisen jännityspinta-alan* käsite. Ideana on, että alemman jännityksen pinta-alaa vähennetään vaurioitumistodennäköisyyden alenemista vastaavasti koon vaikutusta laskettaessa. Menetelmän perusteet on esitetty lähteessä [11]: seuraavassa näytetään vain lyhyesti laskennan kulku. Tehdään se esimerkkilaskelman avulla. Laskennassa käytettyjä kaavoja ei tässä johdeta: viitataan vain mainittuun lähteeseen.

Oletetaan, että kyseessä on sileä akseli, jonka halkaisija on 100 mm. Maksimijännitys olkoon 100 MPa. Jännitys alenee lineaarisesti maksimikohdasta pois päin: 10 MPa 100 mm:n matkalla. Vaurioitumistodennäköisyys alueella, jossa jännitys on pienempi kuin 70 % maksimista, on häviävän pieni. Tarkastellaan siis vain aluetta, jossa jännitys on sitä suurempi: 300 mm:n pituinen pätkä akselia. Jaetaan alue vaikkapa viiteen tasapituiseen alueeseen. Tehdään laskelma hiukan varman päälle ja otetaan jännitykseksi kullakin alueella siinä vaikuttava suurin jännitys. Kunkin alueen todellinen pinta-ala on  $A = 60 \text{ mm} * \pi * 100 \text{ mm} = 18850 \text{ mm}^2$ . Ensimmäisen alueen jännitys on nyt  $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$  ja alue on kokonaan tehollista. Toisen alueen reunalla jännitys on alentunut arvoon  $\sigma_2 = 94 \text{ MPa}$ .

Oletetaan väsymislujuus normaalisti jakautuneeksi ja väsymislujuuden hajonnaksi 5 % eli variaatiokertoimeksi  $v = 0,05$ . Nyt voidaan jännitysten välille kirjoittaa yhtälö:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 + z \cdot v \quad (18)$$

missä  $z$  = normaalijakauman normalisoitu muuttuja

Sijoittamalla tähän lukuarvot saadaan ratkaistuksi muuttujan arvo  $z = 1,2$ . Käyttämällä jotain laskentaohjelmaa (esim. Excel) tai valmiita normaalijakaumataulukkoita, nähdään, että tämä vastaa todennäköisyyttä  $P_2 = 0,8849$ . Tämä on todennäköisyys, jolla alue 2 selviää vauriotta eli sen selviämistodennäköisyys. Toisen alueen tehollinen pinta-ala saadaan lausekkeesta:

$$A_{2eff} = A_2 \cdot \frac{\log(P_2)}{\log(P_1)} \quad (19)$$

Kaavassa ensimmäisen alueen selviämistodennäköisyys on  $P_1 = 0,5$ . Suorittamalla laskutoimitus saadaan toisen alueen tehollinen pinta-ala:  $A_{2eff} = 0,176 \cdot A_2 = 3325 \text{ mm}^2$ . Tämä on siis pinta-ala, jossa vaurion esiintymistodennäköisyys jännityksellä 100 MPa on sama kuin todellisella pinta-alalla jännityksen arvolla 94 MPa.

Samalla tavalla saadaan teholliset pinta-alat lopuille alueille ja niiden summana tehollinen pinta-ala koko kappaleelle. Arvot on taulukoitu alla.

**Taulukko 2.** Tehollisen jännityspinta-alan laskenta.

Alue	$\sigma$	$z$	$P$	$A_{eff}$
1	100	0	0,5	18850
2	94	1,2	0,8849	3325
3	88	2,73	0,9968	87
4	82	4,39	0,9999	3
5	76	6,32	1	0

Koko alueen tehollinen pinta-ala saadaan summaamalla alueiden arvot eli  $A_{eff} = 22265 \text{ mm}^2$ , kun todellinen pinta-ala on  $94250 \text{ mm}^2$ . Tehollinen ala on siis vain 24 % todellisesta. Kun määritetään tilastollista koon vaikutusta, käytetään nyt saatua tehollisen jännityspinta-alan arvoa.

Taulukko kertoo havainnollisesti, kuinka nopeasti vaurioitumistodennäköisyys pienenee jännityksen alentuessa. Siitä huomataan myös, että laskentaportaiden on syytä

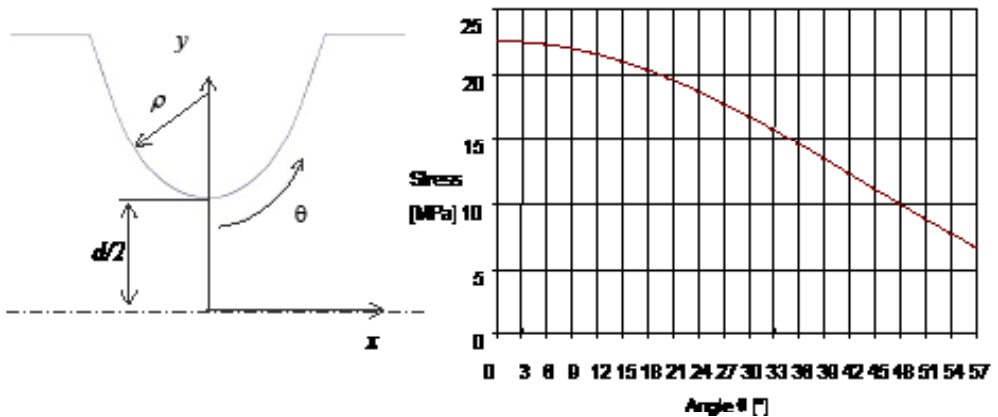


olla maksimijännityksen lähellä paljon tiheämpiä kuin nyt käytettiin: tulos on turhan epätarkka näin karkein portain.

#### 9.4 Tehollinen jännityspinta-ala lovikohdissa

Lovikohtien käsittely tapahtuu analogisesti edellä olevaan. Jännitys jakauma lovessa on siis tunnettava. Käsikirjoista löytyy valmiita kaavoja joillekin tavallisimmille lovi-muodoille. Usein joudutaan jännitys jakauma laskemaan FEM-ohjelmistoa käyttäen. Elementtijaon tulee tällöin olla todella hieno, jotta jännitys arvot saadaan riittävällä tiheydellä. Jännitys alenee nopeasti maksimijännityksen kohdasta pois päin mentäessä, joten kovin suurelta alalta ei jännityksen arvoja tarvitse kerätä. on esimerkki FEM:llä lasketusta jännitys jakaumasta. Loven pohja voidaan jakaa esim. 3° segmentteihin kuten tässä. Jokaiselle segmentille lasketaan sen pinta-ala ja jännitys jakaumasta haetaan jännityksen arvo segmentin keskellä. Kunkin segmentin tehollinen jännityspinta-ala määrätään kuten edellä olevassa esimerkissä ja sitä kautta koko loven tehollinen jännityspinta-ala saadaan määritetyksi.

On myös muistettava, että tapauksissa, joissa lovikohtia on useampia, on jännityspinta-ala laskettaessa huomioitava ne kaikki eli summattava kaikkien lovien jännityspinta-alat. Tämä siis inä tapauksessa, että murtuma missä lovessa tahansa johtaa koko rakenteen sortumaan.



Kuvio 14. Esimerkki loven jännitys jakaumasta [3, 23]

Palataan nyt luvussa 5.1 käsitelyyn akseliesimerkkiin. Olakkeelle R4 tehtiin FEM-analyysi ja saatiin yllä kuvatun kaltainen jännitys jakauma. Tilastolliseksi koon vaihtusluvaksi saatiin 0,87. Normaalisti lovien kertoimet ovat  $> 1,0$ , mutta tehollinen jännityspinta-ala tuli tässä yllättävän suureksi ison halkaisijan takia. Lisäksi on huomattava, että jännityspinta-alaan on laskettava tässä mukaan molemmat samanlaiset olakkeet. Molemmissa olakkeissa on sama jännitystila ja murtuma voi tapahtua kummasta tahansa.

Akselimateriaalin todellista staattista lujuutta ei saatu aivan tarkoin selvitettyksi, mutta paras arvio on, että se oli 1,5 kertaa koesauvan lujuutta alempi. Näin ollen todellisuudessa varmuusluku oli 1,6:n sijasta noin  $0,87 \cdot 1,6 / 1,5 = 0,93$ . Tämä täsmää käytännön havaintoihin: iso osa akseleista katkesi.

Tilastollinen koon vaikutus selittää myös, miksi rasvareian kohdalta ei murtumia tapahtunut. Sille ei FEM – analyysiä tehty, mutta on helppo nähdä, että tehollinen jännityspinta-ala sille on todella pieni, vain muutamia neliömillimetrejä. Niinpä tilastolliseksi koon vaikutusluvuksi tulisi runsaasti päälle 1,0:n.

## 9.5 Koon vaikutusluvun soveltaminen käytännön rakenteille

Edellä on jo puhuttu siitä, että ainespaksuuden kasvaessa staattiset lujuusarvot alenevat. Tämä vaikuttaa suoraan myös väsymislujuuteen, joten vastaava vähennys on tehtävä väsymislujuuden arvioon.

Ainespaksuudella on myös toinen vaikutus, joka on inhottavampi. Aihion valmistusprosessissa jäähtymisnopeus on sitä hitaampi, mitä suurempi ainespaksuus on. Tämä johtaa suurempaan raekokoon. Paitsi lujuuteen, raekoon kasvu vaikuttaa myös väsymislujuuden hajontaan: hajonta kasvaa isommissa kappaleissa myös tällaisen teknologisen vaikutuksen takia. Tilastollisesti ilmaistuna: vaikka on samasta materiaalista kysymys, eri ainesvahvuuden kappaleita ei voida olettaa kuuluviksi samaan emopulaatioon (niillä on erilaiset tilastolliset arvot).

Lujuuden aleneminen ainespaksuuden funktiona on melko hyvin tunnettu tai voidaan ainakin helposti määrittää yksinkertaisen vetokokeen avulla. Ainespaksuuden vaikutuksesta väsymislujuuden hajontaan ei sen sijaan ole kovin paljon kokeellisia tuloksia. **Jos halutaan tarkka arvio väsymislujuudesta, käytetty referenssikoesarja on tehtävä koesauvoilla, jotka on valmistettu kohdekappaleen ainesvahvuutta olevasta aihioista** (ne voivat silti olla normaalin kokoisia eli pieniä).

Jos on olemassa arvio hajonnan muutoksesta referenssikoesarjaan verrattuna, voidaan menetellä myös niin, että tilastollista koon vaikutuslukua määritettäessä käytetään muuta suunnittelukäyrää kuin referenssisauvan mukaista. Esimerkki: referenssisauvan pinta-ala kokeessa on ollut  $1000 \text{ mm}^2$  ja hajonnaksi on saatu 5 %. Halutaan arvio kappaleelle, jonka tehollinen jännityspinta-ala on  $100\,000 \text{ mm}^2$ . Tämän kappaleen väsymislujuuden hajonnan tiedetään kasvaneen ainespaksuuden takia olevan 20 % korkeampi kuin referenssisauvan. Koon vaikutusluku luetaan  $5 \cdot 1,2 = 6$  % hajonnan kohdalta eli kuviossa 11 käyrien 5 ja 7 % puolivälistä.

Huomautetaan vielä, että ellei tarkkaa tietoa hajonnan muutoksesta ole, kannattaa muutos arvioida varman päälle. Tämä tarkoittaa, että hajonta arvioidaan referenssikoetta suuremmille kappaleille yläkanttiin sekä pienemmille vastaavasti alakanttiin.

Artikkelissa [13] kirjoittaja käsittelee kyseistä aihetta. Lähteessä [7] on joitakin tuloksia hajonnalle eri ainespaksuudella. Hajonnan kasvu ei näytä olevan lineaarinen

ainespaksuuden funktiona. Seuraavan kaltaisen kaavan havaittiin toimivan ko. materiaalilla akseleille halkaisijavälillä 23 – 181 mm:

$$s_t = \left( 1 + \sqrt{\frac{D_0 - s_{23}}{158}} \right) \cdot s_{23} \quad (20)$$

missä

$s_t$  = kohdekappaleen hajonta

$s_{23}$  = Ø23mm koesauvan kappaleen hajonta

$D_0$  = 181 mm

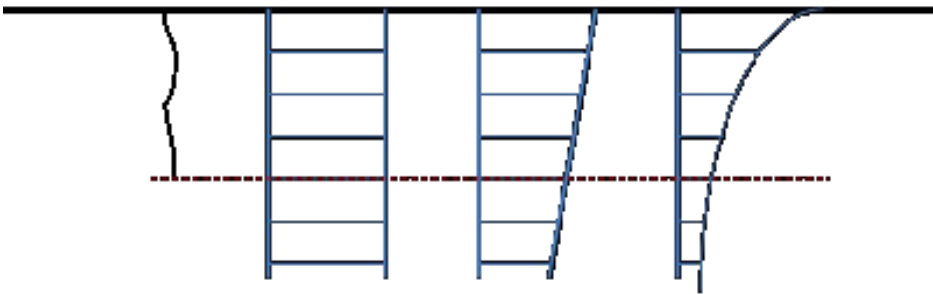
Halkaisijaltaan 181 mm;n aihioista otetun koesauvan hajonta kasvoi tässä tapauksessa samankokoisilla sauvoilla siis kaksinkertaiseksi 23–milliseen verrattuna.



## 10 GEOMETRINEN KOON VAIKUTUS

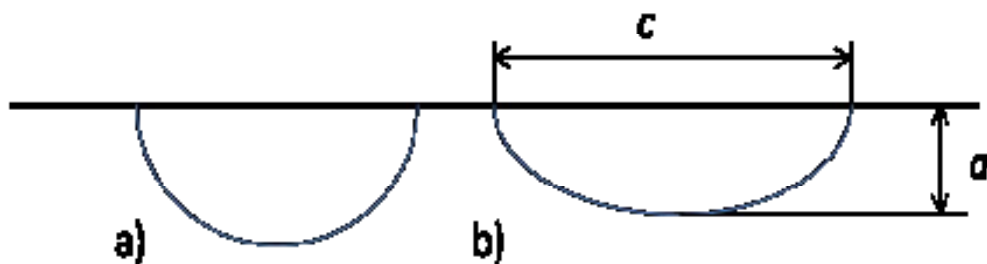
Jännitysgradientin vaikutusta väsymislujuuteen voidaan kutsua nimellä *geometrinen koon vaikutus*, koska jännitysgradientti johtuu kappaleen geometriasta, esim. lovesta. Kirjoittajan kehittämä lähestymistapa perustuu siihen, että tutkitaan kappaleen pintaan ydintynyttä alkusäröä ja jännitysintensiiteettikertoimen suuruutta kahdessa tapauksessa: vakiojännityksellä ja muuttuvassa jännityskentässä. Alkusärön kooksi valitaan sellainen, joka on juuri vaihtamaisillaan kasvumoodin lyhyen särön kasvusta pitkän särön moodiin: koko lasketaan siten jännitysintensiiteettikertoimen kynnsarvon avulla kaavasta (8).

Tarkastellaan tilannetta alla olevan kuvan avulla.



**Kuvio 15.** Ydintynyt alkusärö erilaisissa jännityskentissä.

Kuvioon on piirretty alkusärö sekä kolme erilaista jännitys jakaumaa, joissa kaikissa maksimijännitys on sama. Selvä on, että säröä avaava voima on suurin tasaisella jännitys jakaumalla ja pienin epälinearisella jakaumalla. Niinpä kriittinen alkusärökoko viime mainitussa tapauksessa on suurempi, tai kääntäen, väsymisraja on korkeampi. Väsymisrajan kasvua voidaan arvioida laskemalla jännitysintensiiteettikertoimen arvo muuttuvassa jännitys jakaumassa ja vertaamalla sitä tasaisella jännitys jakaumalla saatavaan. Asian tekee hiukan monimutkaiseksi se, että syntyvän särön muoto pyrkii olemaan erilainen erilaisissa jännityskentissä. Särö pyrkii hakemaan muodon, jossa jännitysintensiiteettikertoimen arvo on vakio koko rintamassa, sekä syvimässä pisteessä että pinnassa. Niinpä tasaisella jännityksellä särön sivusuhte pyrkii arvon  $a/c = 0,8$ , missä  $a$  on särön syvyys ja  $c$  sen pituus. Jyrkässä jännitysgradientissa sivusuhte pienenee eli säröstä tulee pitkulainen. Tätä havainnollistetaan seuraavassa kuviossa:



**Kuvio 16.** Särö vakiojännityskentässä a) sekä jännitysgradientin kohdalla b)

Erilaisten ja erilaisissa muodoissa sijaitsevien säröjen jännitysintensiteettikertoimen arvoja on raportoitu kirjallisuudessa paljon, esim. [17] ja [19]. Ratkaisut on kuitenkin haettu vain harvoille särön syvyyden ja sivusuhteen arvoille. Melko kätevä yleinen tapa on käyttää painofunktioita. Silloin jännitysintensiteettikertoimen lauseke on:

$$K_I = \int_0^a \sigma(x) \cdot m(x, a) dx \quad (21)$$

Painofunktiot ovat hyvin monimutkaisia lausekkeita ja niissä tarvitaan joukko hankalia kertoimia. Laskentaan kannattaakin käyttää MathCadiä tai vastaavaa ohjelmaa. Lähteessä [15] on johdettu ratkaisut levyjen pintasäröille. Niitä voi hyvin käyttää myös esim. akselleille, kun särö on hyvin pieni halkaisijaan verrattuna: tähän on aina tilanne, kun tarkastellaan juuri ydintynyttä säröä. Jännitys pitää pystyä lausumaan syvyyden  $x$  funktiona. Lineaariset jakaumat ovat helppoja. Lovien kohdalla voidaan menetellä niin, että lasketaan FEM:llä jännitys jakauma ja sovitetaan mallista saataviin jännitysarvoihin sopiva polynomi. Kohtuullinen tarkkuus tarvitaan vain särön syvyyteen  $a$  saakka.

Käsitellään esimerkkinä tapaus, jossa on 0,1 mm syvä alkusärö 10 kaltaisissa jännityskentissä. Alkusärön koko lasketaan siis jännitysintensiteettikertoimen kynnsarvon avulla kaavasta ( 8 ).

Olkoon kyseessä akseli, jonka halkaisija on 40 mm. Valitaan jännityksen maksimiarvoksi 100 MPa. Vakiojännityksen ja taivutusjännityksen tapauksissa sivusuhteella  $n. a / c = 0,8$  on jännitysintensiteettikertoimen arvo vakio koko särörintamassa. Jännitysten lausekkeet ovat:

- vakiojännitys:  $\sigma(x) = 100$  MPa
- taivutusjännitys:  $\sigma(x) = (1 - 2x/40) \cdot 100$  MPa.

Oletetaan tässä esimerkissä, että epälineaarisen tapauksen jännitysfunktio on paraabeli siten, että jännitys särön pohjan kohdalla on puolet huippuarvosta. Silloin jännityksen lauseke on:

$$\sigma(x) = (1 - x^2 \cdot 50) \cdot 100 \text{ MPa}.$$

Nyt joudutaan laskemaan jännitysintensiiteettikertoimen arvo sekä syvimmissä pisteessä ja pinnan pisteessä ja iteroimaan sivusuhdetta, kunnes jännitysintensiiteettikerroin on sama molemmissa pisteissä (ja silloin koko särörintamassa). Saadaan  $a / c = 0,47$ .

Saadaan seuraavat jännitysintensiiteettikertoimen arvot eri jännitys jakaumille:

- vakiojännitys:  $K_I = 41 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .
- taivutusjännitys:  $K_I = 41 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .
- epälineaarinen jännitys:  $K_I = 38 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Nähdään siis, että taivutusjännityksen ja vakiojännityksen välillä tuloksissa ei ole eroa tämänkokoisessa akselissa.

Lähteissä [7] ja [20] on molemmissa ollut sama materiaali väsytykskokeissa. Saadut väsymislujuuksien arvot ovat käytännössä samat, vaikka toisessa on käytetty veto-puristustestiä ja toisessa taivutuskoetta. Niinpä voidaan todeta, että vanhoissa käsikirjoissa esiintyvät erot taivutus- ja veto-puristuslujuuksien välillä eivät pidä paikkaansa.

Jännitysgradientti vaikuttaa sen sijaan selvästi jännitysintensiiteettikertoimen arvoon epälineaarisisessa jännityskentässä. Väsymislujuus tällaisessa tapauksessa nousee tämänkin johdosta. Nousu tapahtuu suoraan jännitysintensiiteettikertoimien suhteessa eli tässä tapauksessa *geometrinen koon vaikutusluku* olisi:

$$k_g = 41 / 38 = 1.08.$$

Jännitysgradientin jyrkkyyteen vaikuttaa paitsi lovenmuotoluku  $K_I$  myös kappaleen fyysiset mitat. Siksi ei voi luoda suoraa yhteyttä lovenmuotoluvun ja geometrisen koon vaikutusluvun välille. Tavallisimmille lovytyypeille kuten olakkeille tulisi käytännön suunnittelutyötä varten laatia käyrästöt. Oheiseen taulukkoon on kerätty lähteissä [7] ja [20] käytetyistä koesauvoista geometriset koon vaikutusluvut summittaisen käsityksen saamiseksi. Kaikki koesauvat olivat pyörötankoja, joiden keskellä on V-lovi. Taulukon merkinnät:

- koetyyppi: r-b = rotating bending, t-c = tension-compression
- $r$  = loven pohjan säde
- $k_g$  = geometrinen koon vaikutusluku

**Taulukko 3.** Esimerkkejä geometrisesta koon vaikutusluvusta.

$K_t$	$r$	$k_g$	koe		$K_t$	$r$	$k_g$	koe
2,16	0,66	1,04	t-c		2,24	0,92	1,03	r-b
2,25	1,8	1,02	t-c		2,25	2,75	1,01	r-b
2,25	3,43	1,01	t-c		2,25	5,05	1,00	r-b
5,4	0,12	1,48	t-c		5,11	0,15	1,24	r-b
5,4	0,22	1,16	t-c		5,75	0,34	1,1	r-b
6,1	0,31	1,22	t-c		5,86	0,6	1,05	r-b
5,7	0,85	1,04	t-c		5,87	1,25	1,03	r-b

Taulukosta huomataan, että tylpillä lovilla geometrisen koon vaikutusluvun merkitys on pieni. Teräväpohjaisten lovien kokeista taas nähdään, että geometriseen koon vaikutuslukuun vaikuttaa lovenmuotoluvun ohella myös loven pohjan säteen suuruus.

Terävien lovien kokeista on todettava vielä eräs huomio. Kaikissa kokeissa, joissa  $k_g \gg 1,1$ , on plastisen muodonmuutoksen määrä huomattavan suuri. Geometrinen koon vaikutus on laskettu huomioonottamatta sitä. Todellinen jännitys lovenpohjalla ei ole tällaisessa tapauksessa niin suuri kuin lineaarinen laskenta antaa eikä saatu koonvaikutusluku näin ollen ole todellinen.

Toisaalta plastisen muodonmuutoksen kasvu madaltaa väsymislujuutta eivätkä lineaariset laskentamenetelmät muutenkaan päde. Voidaan ajatella tilannetta, että  $r$  lähenee nollaa ja  $K_t$  ääretöntä. Tämä tapaus voitaisiin käsitellä niin, että oletetaan kohdassa olevan loven syvyyden kokoisen alkusärön. Väsymislujuuden alin ääriarvo saataisiin tällöin murtumismekaniikan avulla. Väsymisraja ratkaistaisiin kaavasta ( 8 ) sijoittamalla alkusärön kooksi loven syvyys!



## 11 ÄÄRELLISEN KESTOIÄN ENNUSTAMINEN

Kuviossa 9 on koekappaleiden väsymisikiä jännitysvaihtelun arvolla  $\Delta\sigma \approx 500$  MPa todennäköisyyspiirroksen muodossa. Koekappaleet ovat kaikki erimittaisia pätkiä 5 mm:n langasta. Vahva koon vaikutus on siis nähtävissä myös äärellisen kestoiän alueella. Samassa lähteessä [7] on tuloksia myös muille jännitystasoille. Koon vaikutus näkyy yhtä voimakkaana korkeimmallakin jännitystasolla, joka on jo ylittänyt syklisen myötörajan.

Näissä sauvoissa ei ole mitään teknologisia eroja eikä mitään muutakaan, mikä voisi tällaiset erot selittää. Kyseessä täytyy nytkin olla tilastollinen koon vaikutus. Kun katsotaan erimittaisten sauvojen elinikien hajontaa, nähdään, että lyhimmän sauvan hajonta on suurin: se on linjassa ääriarvoteorian kanssa.

Koska koesauvojen poikkileikkaus on sama, täytyy särönkasvuiän (stabiili särönkasvu) olla sama kaikilla erimittaisilla sauvoilla. Niinpä jännitysikien erojen täytyy syntyä säröjen ydintymisvaiheessa. Sen vuoksi väsymisiän laskenta on jaettava kahteen osaan:

1. Ydintymisiän ennustaminen tilastollisesti.
2. Stabiilin särön kasvuiän laskeminen Parisin lain avulla.

Kokonaisikä saadaan sitten edellisten summana.

### 11.1 Ydintymisiän ennuste

Kun väsymisrajaa arvioitaessa haettiin ydintyneiden *alkusäröjen maksimi*arvon estimaattia, äärellisen kestoiän alueella on saatava arvio säröjen *ydintymisikien minimi*lle. Otoksen minimin ennustaminen käy ääriarvoteorian avulla yhtä hyvin kuin maksimin. Tarvittavat yhtälöt ovat hiukan erilaiset:

- kertymäfunktio: 
$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (22)$$

- jakaumafunktio: 
$$f_{X_{1:n}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} \cdot f(x) \quad (23)$$

Prosessi on hyvin samankaltainen kuin luvussa 9 esitetty väsymisrajan arvioinnin menetelmä. Nyt on oltava käytettävissä kaksi referenssikoesarjaa eri jännitystasoilta. Niiden avulla saadaan selville Wöhler-käyrän kaltevaa osaa vastaavan ydintymiskäy-

rän kaltevuus. Toisen sarjan tulee olla riittävän laaja, jotta tilastolliset parametrit saadaan luotettavasti määritetyksi.

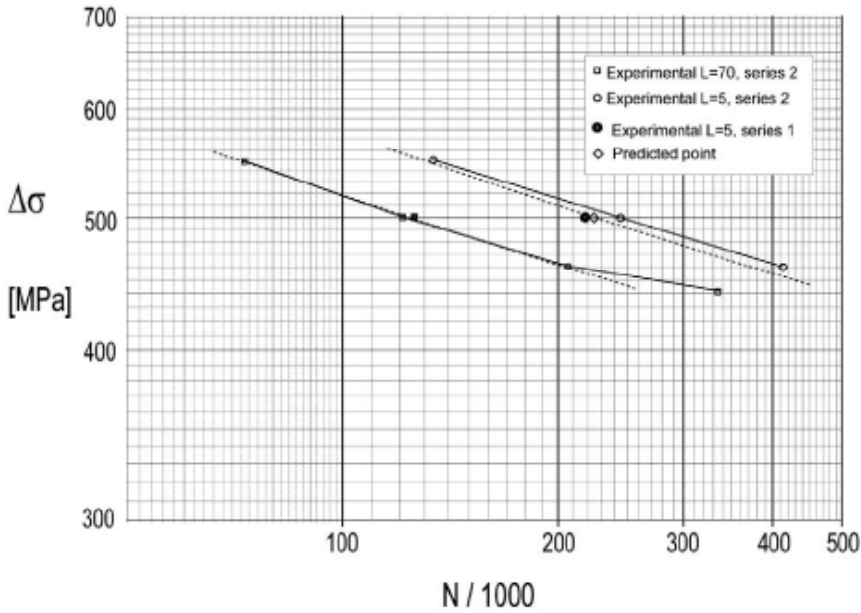
Koska väsytykskoe sisältää aina sekä ydintymisiän että särönkasvun, jälkimmäinen on laskettava murtumismekaniikalla ja vähennettävä kokonaisuudesta ydintymisiän saamiseksi. Edustavampaan saaduista ydintymisikien joukoista sovitetaan valittu jakaumafunktio: Weibull on tässäkin hyvä ehdokas. Parametrit iteroidaan niin, että koesauvan kokoiselle otokselle saadaan referenssikoesarjan mukaiset ydintymisiän keskiarvo ja hajonta. Nyt pystytään saamaan ennusteet minkä tahansa kokoiselle kappaleella referenssikokeen jännitysvaihtelun arvolla.

Mitoitustyötä varten voidaan piirtää joukko suunnittelukäyriä tai pikemminkin -suoria. Ensimmäinen suora on tietysti referenssikoe: piirretään viiva referenssikokeiden väsymislujuuksien keskiarvoja vastaavien pisteiden kautta. Valitaan sopivalla jaolla muita tehollisen pinta-alan arvoja ja lasketaan kullekin ennuste toisella jännitystasoista. Merkitään piste koordinaatistoon ja piirretään referenssisuoran suuntainen suora kunkin pisteen kautta.

Alla on lähteessä [13] esitetty piirros kuvatulla tavalla piirretystä ydintymisikäykäyrästä kuvion 9 koesauvoille. Alempi on  $L = 70$  mm sauva, joka on referenssikoe. Tämä vastaa tehollista pinta-alaa  $1100 \text{ mm}^2$ . Ylempi käyrä on ennuste  $L = 5$  mm sauvalle, joka vastaa pinta-alaa  $78 \text{ mm}^2$ . Jälkimmäiselle on kuvaan piirretty myös koeksessa saadut arvot: vastaavuus on varsin hyvä.

Lisää käyriä voitaisiin nyt piirtää sopiville muille pinta-aloille. Suurempien kappaleiden käyrät olisivat vasemmalla alhaalla, pienten oikealla ylhäällä.

Huomautetaan, että käyriä voi nytkin käyttää sekä sileille että lovellisille komponenteille. Lovikohtien teholliset jännityspinta-alat ovat luonnollisesti pieniä ja niille saadaan korkeita ydintymisikien arvoja. Tämä selittää osaltaan sen, että lovellisille koe-kappaleille piirretyt Wöhler-käyrät ovat hyvin loivia (ks. Kuvio 6).



**Kuvio 17.** Ydintymiskäyrät kuvion 9 koesauvoille  $L = 5 \text{ mm}$  ja  $L = 70 \text{ mm}$

## 11.2 Särön kasvuiän laskeminen

Kuten edellä jo mainittiin, stabiili särönkasvuikä voidaan laskea murtumamekaniikalla käyttäen Parisin lain kaavaa (7), ks. luku 6. Kasvuiän laskemiseen tarvitaan aina sekä särön alkukoko että loppukoko: kasvuiän laskemiseksi Parisin laki integroidaan ensin mainitusta jälkimmäiseen. Loppusärön koko voidaan laskea tarkastikin, jos tunnetaan kyseisen materiaalin murtumissitkeys  $K_{Ic}$ . Loppusärökoko voidaan silloin ratkaista jännitysintensiteettikertoimen kaavasta (8) merkitsemällä se yhtä suureksi kuin  $K_{Ic}$ . Useimmiten murtumissitkeyden tarkka arvo ei ole tiedossa. Suurta virhettä ei tehdä, vaikka loppusärökoko arvioidaan jollakin likimääräisyydellä. Loppuvaiheessa särön kasvunopeus on niin suuri, että virheen vaikutus kasvuiäkarvioon jää pieneksi.

Tiedetään, että hyvin pienissä kappaleissa, joita väsymiskoesauvat aina ovat, eliniästä valtaosa, jopa yli 80 %, on alkusärön ydintymistä. Se on siis hyvin hidas prosessi: näin ollen voidaan olettaa, että särö siirtyy kasvumoodiin heti, kun se on mahdollista (jännitysintensiteetin kynnyсарvo on ylitetty). Tämä tarkoittaa, että ydintyneen särön koko saadaan yhtälöstä (8) sijoittamalla jännitysintensiteettikertoimen arvoksi sen kynnyсарvo ko. materiaalille. Kynnyсарvot ovat tyypillisesti luokkaa  $6 - 8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Parisin lain integrointi, kaava (9), kannattaa suorittaa numeerisesti jollakin matemaatiikkaohjelmalla kuten MathCad. Ongelmana on, että useimmiten geometriakerroin  $\beta$  muuttuu särön kasvaessa. Jos se voidaan lausua särökoon funktiona, integrointi käy helposti. Kirjoittaja on laatinut pyörötangoille soveltuvan kaavan lähteessä [13]. Saatavilla on myös useita ohjelmistoja, joilla särön kasvua voidaan simuloida.



## 12 VÄSYMISLUJUUDEN TYÖKALUJEN KEHITTÄMINEN

### 12.1 Väsymisrajan määrittäminen

Tilastollisen koon vaikutusluvun määrittämiseen on mahdollista kehittää kuvion 13 mukaiset käyrästöt lisättyä aputaulukolla (ks. Taulukko 1). Mainittu käyrä ja taulukko on tehty yhden materiaalin arvoilla. On varmistettava, onko se riittävän yleispätevä erilaisilla hajonnan ja keskilujuuden arvoilla.

Useimmiten jännitys tarkasteltavassa kappaleessa ei ole vakio, joten joudutaan laskemaan tehollinen jännityspinta-ala (ks. luvut 9.3 ja 9.4). Tämän nopeuttamista varten on helppo laatia aputaulukot.

Taulukossa 2 on esimerkkilaskelma. Tällaiseen taulukkoon voidaan laskea valmiiksi tehollisen pinta-alan vähennyskertoimet eri suhteellisille jännitystasoille (0,99, 0,98, 0,97...). Taulukoita tulee olla riittävän monta eri hajonnan arvoille. Samaa taulukkoa voidaan käyttää sekä sileille että lovellisille kappaleille. Toisaalta tyypillisille lovikohdille voidaan laskea valmiita tehollisen jännityspinta-alan arvoja. Ne voisivat olla joillakin valituilla mitoilla ja saatua tulosta skaalattaisiin kohdekappaleen suhteessa.

### 12.2 Geometrinen koon vaikutus

Myös jännitysgradientin vaikutuksen arvioimiseen on syytä olla valmiiksi laskettuja työkaluja. Ne voivat olla sopivia käyriä tai taulukoita. Geometriseen koon vaikutusluvuun eivät vaikuta materiaaliarvot, joten ne ovat yleispäteviä. Sopiva apuneuvo saattaisi olla käyräparvi eri lovenmuotoluvun  $K_l$  arvoilla loven pohjan säteen funktiona. Käyrästöstä saataisiin siis geometrisen koonvaikutusluvun arvo.

Tässä kohtaa on vain muistettava, että loven tullessa terävämmäksi plastisen muodonmuutoksen määrä loven pohjalla alkaa tulla merkittäväksi ja se tulee väsymistä määrääväksi tekijäksi. Teoreettinen lovenmuotoluku ei päde, jos plastinen muodonmuutos on suuri: jännitys ei todellisuudessa nouse lasketun suuruiseksi, koska sykliksen myötörajan arvo ylitetään. Lisätutkimukset olisivat tarpeen tämän ilmiön mallintamiseksi.

### 12.3 Särön ydintymisikä

Luvussa 11.1 näytettiin, kuinka tietylle materiaalille on mahdollista laatia mitoituskäyrästö (Kuvio 17) särön ydintymisiän ennustamiseen. Tällainen tulee olla kaikille käytetyille materiaaleille. Parametrina käyrästössä on jälleen tehollinen jännityspinta-ala. Käyrästöön voidaan piirtää riittävä määrä käyriä, jotta koko käyttöalue pienimmästä lovesta suurimpaan esiintyvään rakenneosaan tulee katetuksi. Käyräparven sijasta voidaan käyttää yhtä suunnittelukäyrää, johon sovelletaan koon vaikutuslukua samalla tavalla kuin väsymisrajan ennustamisessa.

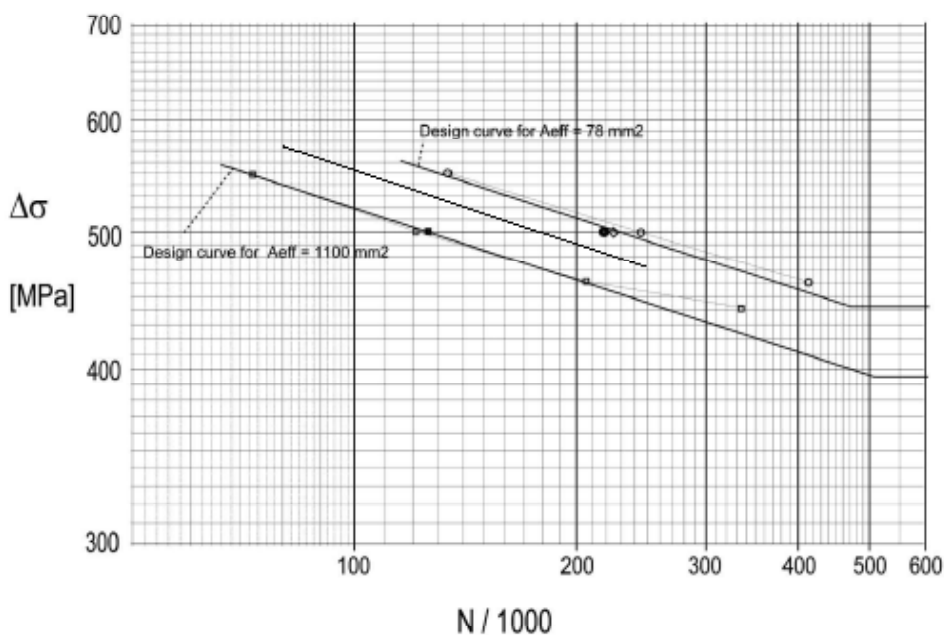
## 12.4 Särönkasvuiän laskeminen

Mihinkään ei päästä siitä, että stabiili särönkasvuikä on tarkan väsymiskäarvion saamiseksi laskettava murtumismekaniikkaa apuna käyttäen (luku 11.2). Särönkasvun simulointiohjelmia on nykyään useita saatavilla: esim. USA:n ilmavoimien tutkimuskeskuksen aikanaan kehittämä AFGROW ja NASA:n NASGRO.

Moniin yksinkertaisiin kohteisiin on mahdollista laatia suunnittelutyökalu matemaattikkaohjelmia hyväksi käyttäen. Kirjoittaja on käyttänyt akseleille hiukan yksinkertaistettua metodia, joka perustuu kirjallisuudesta löydettyihin jännitysintensiiteetti-kertoimen arvoihin ja Parisin lain integrointiin MathCadiä käyttäen [13]. Menettelyä käytetään laskuesimerkissä luvussa 13.2.

## 12.5 Suunnittelukäyrät

Äärellisen kestoiän alue ja väsymisrajan ennustaminen on mahdollista viedä suunnittelukäyrästä muotoon, kuten kirjoittaja on esittänyt lähteessä [13]. Siinä on käsitelty samoja koesauvoja kuin luvussa 11.1.



**Kuvio 18.** Suunnittelukäyrästä materiaalille X2 Cr Ni 19 9.

Kuvassa käyrä  $A_{eff} = 1100 \text{ mm}^2$  on referenssisauva  $L = 70 \text{ mm}$ . Toinen käyrä suunnittelukäyrä on koesauvaa  $L = 5 \text{ mm}$  vastaavalle kappalekoolle ( $A_{eff} = 78 \text{ mm}^2$ ). Lisää suunnittelukäyriä piirrettäisiin niin, että koko käyttöalue tulisi katetuksi.

Tähän piirroksen on lisätty myös väsymisrajat. Ainakin tällä materiaalilla lujuuksien

suhde on sama sekä väsymisrajalla että low-cycle-alueella. Niinpä olisi mahdollista esittää käyrästössä pelkkä referenssisauvan käyrä ja käyttää muun kokoisille kappaleille tilastollista koonvaikutuslukua koko alueella.

Muistutetaan vielä, että äärellisen kestoian alueella käyrästä saadaan ydintymisikä ja särönkasvuikä on laskettava erikseen ja lisättävä edelliseen koko elinikäarvion saamiseksi.

## **12.6 Teknologiset vaikutukset**

Lopuksi tuodaan vielä kerran esille seikka, joka hankaloittaa käytännön mitoitus-työtä ikävästi. Metallien rakenne ja ominaisuudet vaihtelevat erinäisistä teknologisista syistä johtuen. Materiaalit eivät ole homogeenisia ja erityisesti lähtöaihion koko vaikuttaa sekä mekaanisiin että tilastollisiin ominaisuuksiin. Mitoituksen pohjana olevat kokeet pitäisi tehdä aina koesauvoilla, jotka ovat ominaisuuksiltaan mahdollisimman lähellä kohdeosia ja -rakenteita. Tämä ei tietenkään ole useinkaan mahdollista, vaan joudutaan käyttämään likimääräiskeinoja.

Aihion ainespaksuuden kasvaessa materiaalin staattinen ja dynaaminen lujuus alenevät. Tämä on mahdollista huomioda, kunhan ainespaksuuden vaikutus staattiseen lujuuteen tunnetaan. Väsymislujuuden hajonta kasvaa ainespaksuuden mukana. Tästä asiasta ei valitettavasti ole juuri koetuloksia olemassa ja lisätutkimus olisi tarpeen. Luvussa 9.5 on edellä mainittuja ongelmia pohdittu tarkemmin.





## 13 LASKUESIMERKKEJÄ

### 13.1 Esimerkki 1: sileän sauvan väsymisraja

Otetaan tarkasteluun kolmas lähteen [7] koesauvoista: 5 mm lanka, jonka koestuspituus on  $L = 20$  mm (ks luvut 5.2 ja 11.1). Arvioitava sauvan väsymisraja.

Otetaan jännitys-elinikämenetelmän pohjaksi  $L = 70$  mm koetulokset. Kokeet on tehty pinnaltaan samassa tilassa oleville koesauvoille, joten pinnanlaadun korjauskerrointa ei tarvitse soveltaa. Koska koesauvan halkaisija on sama kuin kohdesauvan, ei tarvita myöskään koonvaikutuslukua. Referenssikäyrän luotettavuustasolla 50 % kohdesauvan väsymisrajan ennuste on siis sama kuin referenssisauvan eli  $\Delta\sigma_R = 394$  MPa. Tämä tulisi vielä kertoa luotettavuuskertoimella, jolla keskiarvo muunnetaan suunnitteluarvoksi. Kerroin olisi noin 0,92.

Kirjoittajan kehittämässä tilastollisessa menetelmässä tulee huomioida tilastollinen koon vaikutus eli referenssisauvan tulos on kerrottava tilastollisella koonvaikutusluvulla. Koesauvan  $L = 70$  mm hajonta on ollut 5,1 % ja jännityksen alainen pinta-ala n. 1100 mm<sup>2</sup>. Voidaan käyttää kuvion 12 keskimmäistä käyrää. Pinta-alalle 1100 mm<sup>2</sup> saadaan koonvaikutusluvuksi 0,99. Sauvan  $L = 20$  mm pinta-ala on 313 mm<sup>2</sup>. Sille koonvaikutusluvuksi tulee 1,06. Lopullinen koonvaikutusluku 1100 mm<sup>2</sup> sauvasta 313 mm<sup>2</sup> sauvaan on näiden suhde eli 1,07. Väsymisrajan ennusteeksi ilman luotettavuuskerrointa saadaan siis  $\Delta\sigma_R = 1,07 * 394$  MPa = 422 MPa. Sauvan  $L = 5$  mm kokeellisesti määritetty väsymisraja on 446 MPa, joten saatu tulos on hyvässä linjassa siihen.

### 13.2 Esimerkki 2: sileän sauvan äärellinen kestoikä

Lasketaan sitten samalle sauvalle eliniän ennuste vakioamplitudiselle jännitysvaihtelulle  $\Delta\sigma = 500$  MPa ( $R = -1$ ). Jännitys-elinikämenetelmän mukaan ei  $L = 20$  mm sauvan eliniän tulisi erota referenssisauvasta. Kuvioista 9 saadaan  $L = 70$  mm sauvan keskimääräiseksi eliniäksi  $N = 182000$  kuormanvaihtoa. Tämä olisi siis ennuste  $L = 20$  mm sauvalle: kuvasta kuitenkin nähdään, että tilastollisen koon vaikutuksen takia ennusteen tulisi olla korkeampi.

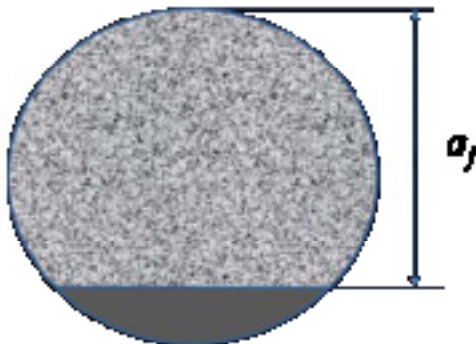
Kuviossa 17 on tässä käsitellylle materiaalille piirretty suunnittelukäyrästä. Referenssisauvan ( $L = 70$  mm) särön ydintymisikä jännitysvaihtelulla  $\Delta\sigma = 500$  MPa on  $N_i = 127000$ . Tällä materiaalilla väsymislujuuksien suhde low-cycle-alueella on sama kuin väsymisrajalla. Tämä tarkoittaa, että voidaan soveltaa samaa tilastollista koonvaikutuslukua. Siitä seuraa, että  $L = 20$  mm sauvalle ydintymisikä  $N_i = 127000$  saataisiin jännitysheilauksen arvolla  $\Delta\sigma = 1,07 * 500$  MPa = 535 MPa (koonvaikutusluku sama kuin edellisessä esimerkissä saatu). Kuvioon 17 on piirretty ydintymissuorien suuntainen viiva saadun pisteen kautta. Se leikkaa  $\Delta\sigma = 500$  MPa tason kohdassa, josta saadaan  $L = 20$  mm sauvalle ydintymisiän ennuste:  $N_i = 180000$ .

Kokonaiseliiniän saamiseksi on vielä laskettava särönkasvuikä. Ratkaistaan ensin alkusärökoko kaavasta ( 8 ).

Jännitysintensiiteettikertoimen kynnyksarvolle löydetään kirjallisuudesta arvo  $K_{I,th} = 6.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Sijoittamalla lähtöarvot kaavaan ( 8 ) saadaan:

$$a_i = \frac{1}{\pi} \left( \frac{6.0}{0.735 \cdot 500} \right)^2 = 0,085 \text{ mm}. \quad (25)$$

Loppusärön koko voidaan arvioida karkeasti: särönkasvu on lopussa niin nopeaa, että virhe on pieni. Voidaan esimerkiksi olettaa, että loppumurtuma tapahtuu, kun jännitys loppukannaksessa ylittää myötörajan tai murtorajan. Arvioidaan tässä loppusärön koko laskemalla sen segmentin koko, jossa jännityksen arvo vastaa materiaalin murtorajaa  $R_m = 794 \text{ MPa}$ . Havainnollistetaan tilannetta seuraavan kuvan avulla:



**Kuvio 19.** Loppusärökoon arviointi.

Ehjässä segmenttikannaksessa vallitsevan jännityksen tulee siis olla murtorajan suuruinen. Särön syvyys määrätään kuvan mukaisesti. Näillä ehdoilla saadaan hiukan geometrian kaavoja pyörittämällä loppusärön syvyydeksi  $a_f = 3,055 \text{ mm}$ .

Jännitysintensiiteettikertoimen lausekkeessa ( 8 ) geometriakerroin  $\beta$  muuttuu särön kasvaessa. Lähteessä [11, 89] kirjoittaja on johtanut pyörötangoille soveltuvan lausekkeen:

$$K_n = \beta \cdot Q = 1.043 + 0.253 \cdot \frac{a}{D} - 0.133 \cdot \left( \frac{a}{D} \right)^2 + 5.332 \cdot \left( \frac{a}{D} \right)^3 \quad (24)$$

Kaavassa  $Q$  on ns. ellipsin muotokerroin:

$$Q = 1 + 1.464 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{1.6}$$

Särön muotosuhteen  $a/c$  voidaan olettaa pysyvän vakiona 0.8 koko kasvun ajan. Aivan loppuvaiheessa se ei pidä paikkaansa, mutta koska vain pieni osa eliniästä on jäljellä, ei virhe ole mainittava.

Nyt voidaan laskea särönkasvuikä kaavasta (9), kunhan tunnetaan Parisin lain vakiot. Vastaavalle materiaalille löydetään kirjallisuudesta seuraavat arvot:

$$m = 3.25$$

$$C_0 = 7.48 \cdot 10^{-14} \text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Integrointi suoritetaan MathCad-ohjelmalla. Kasvuikäksi tulee noin  $N_g = 57100$ . Kokonaiselinikä on siten  $N = N_i + N_g = 180000 + 57100 = 237100$ . Kuvioista 9 nähdään, että koesauvojen keskimääräinen elinikä on ollut noin 215 000. Erinäiset lähtötietojen epävarmuustekijät huomioiden ennuste on kohtuullisen tarkka.

### 13.3 Esimerkki 3: lovellisen sauvan väsymisraja

Käytetään hyväksi lähteen [8] laajaa koeaineistoa. Väitöskirjassa on testattu sekä sileitä että lovellisia sauvoja. Sauvat on valmistettu eripaksuisista pyörötangoista, materiaali on 30CrNiMo8. Lovellisissa sauvoissa on V-lovi. Valitaan niistä tarkasteluun sauva Y2, jonka mitat ovat:

- Halkaisija  $D = 29$  mm
- Halkaisija loven pohjalla  $d = 20,82$  mm
- Loven pohjan säde  $r = 2,75$  mm.

Lovenmuotoluku tälle sauvalle on  $K_t = 2,25$ .

Koonvaikutusilmiöiden havainnollistamiseksi käytetään analyysin pohjana kahta sileitä sauvaa:

1.  $D = 7$  mm, väsymisraja  $\Delta\sigma_{R,7} = 937$  MPa
2.  $D = 20$  mm, väsymisraja  $\Delta\sigma_{R,20} = 801$  MPa.

Kuten nähdään, väsymisrajojen ero on valtava. Syynä ovat sekä teknologiset että tilastolliset koon vaikutukset. Referenssisauvana lovelliselle  $D = 29$  mm sauvalle tulisi

käyttää jälkimmäistä, koska ne on valmistettu samankokoisista lähtöaihioista. Käytännössä väsytyскоetuloksia on yleensä saatavissa vain hyvin pienille sauvoille. Sen vuoksi käytetään myös pienemmän sauvan tuloksia, jotta nähdään aiheutuvan virheen suuruus.

Tässä tapauksessa kohdesauva on pinnan laadultaan samanlainen kuin referenssisauva ja koetulokset ovat samalla luotettavuustasolla (50 %). Siksi pinnan laadun vaikutuskerroin ja luotettavuuskerroin voidaan tässä vertailussa jättää sivuun.

Kokeellisesti tarkasteltavalle sauvalle Y2 on saatu väsymisrajaksi nimellisjännityksenä ilmaistuna  $\Delta\sigma_{R,Y2} = 471$  MPa.

Jännitys-elinikämenetelmässä on määritettävä lovenvaikutusluku  $K_f$ . Kuten aiemmin mainittiin, menetelmiä olisi tarjolla useita. Käytetään tässä perinteistä Petersonin menetelmää. Kaavassa ( 6 ) tarvittavalle materiaalivakiolle Peterson on määrittänyt nuorrutusteräksille arvon  $a = 0,0025$  in. Sijoittamalla kaavaan loven pohjan säde  $r = 2,75$  mm saadaan loviherkkyyslukuksi  $q = 0,977$ . Lovenvaikutuslukuksi kaavasta ( 2 ) saadaan:  $K_f = 2,22$ . Väsymisrajan ennusteet olisivat siis:

1.  $\Delta\sigma_R = 937 / 2,22 = 422$  MPa
2.  $\Delta\sigma_R = 801 / 2,22 = 361$  MPa.

Virhe molemmissa tapauksissa on hälyttävän suuri: onneksi tässä tapauksessa varman puolella. ”Väärää” referenssisauvaa käyttämällä saadaan parempi tulos!

Kannattaa vielä mainita, että ennuste tällä menetelmällä on aina sama, vaikka kohdekappaleen fyysiset mitat muuttuvat, mutta  $K_f$  pysyy samana. Böhm on väitöskirjassaan saanut erikokoisille, mutta samanmuotoisille sauvoille kuitenkin seuraavat väsymislujuuksien arvot:

- $D = 9.64$  mm:  $\Delta\sigma_R = 504$  MPa
- $D = 29$  mm:  $\Delta\sigma_R = 471$  MPa
- $D = 53.6$  mm:  $\Delta\sigma_R = 453$  MPa.

Tilastollinen koonvaikutus näkyy siis vahvana.

Kirjoittajan tilastollisessa menetelmässä on määritettävä geometrinen sekä tilastollinen koonvaikutusluku. Ensin mainittu löytyy taulukosta 3. Vasemmanpuoleisten arvojen toinen rivi on juuri kyseinen tapaus:  $k_g = 1,02$ .

Ohitetaan tässä tehollisen jännityspinta-alan laskenta ja poimitaan se lähteestä [11, 23]. Pinta-alaksi on saatu luvun 9.4 menettelyä käyttäen  $64.8$  mm<sup>2</sup>. Referenssisauvana tulee käyttää  $D = 20$  mm halkaisijaa. Sen jännityspinta-ala on  $3047$  mm<sup>2</sup> ja koetulosten

hajonta on ollut n. 6 %. Tilastolliset koonvaikutusluvut luetaan kuviosta 13 käyrien 5 ja 7 % puolivälistä. Saadaan arvot:

- 64.8 mm<sup>2</sup>: 1,18
- 3047 mm<sup>2</sup>: 0,90.

Koonvaikutusluku referenssisauvasta kohdesauvaan on näiden suhde:  $k_p = 1,18 / 0,9 = 1,31$ . Väsymislujuuden ennuste nimellisjännityksenä on näin ollen:

$$\Delta\sigma_R = \Delta\sigma_{R,7} / K_t * k_g * k_p = 801 / 2,25 * 1,02 * 1,31 = 476 \text{ MPa. Virhe on mitätön!}$$

Tehdään laskelma vielä tässäkin olettaen, että ”oikeankokoisen” referenssisauvan tuloksia ei olisi käytettävissä. Silloinhan teknologiset vaikutukset on arvioitava jollakin keinolla. Böhm on ottanut ainespaksuuden vaikutuksen lujuteen huomioon siten, että lämpökäsittely erikokoisille aihioille on tehty niin, että saadaan mahdollisimman sama staattinen lujuus. Vetolujuus eri sauvoilla on vaihdellut välillä 898 – 966 MPa. Böhm ei ole ilmoittanut sauvakohtaisia lujuuksia, joten tätä vaikutusta ei voida ottaa huomioon. Voidaan kuitenkin nähdä, että se ei ole kovin suuri.

Teknologiset vaikutukset väsymislujuuden hajontaan saattaa olla sen sijaan syytä ottaa huomioon. Kokeellisesti saadut hajonnat  $D = 7 \text{ mm}$  ja  $D = 20 \text{ mm}$  sauvoilta ovat 4,8 ja 6,1 %, kun tilastollisen koon vaikutuksen mukaan saadaan 3,9 ja 6,1 %. Tämä tarkoittaa, että laskettaessa ennustetta  $D = 20 \text{ mm}$  aihion sauvoilta on hajontaa korotettava arvoon 4,8 %. Haetaan ennusteet sekä korjatulla hajonnalla ja ilman sitä, koska käytännössä hajonnan muuttumista ei useinkaan tunneta. Pyöristetään mainitut arvot lukuihin 4 % ja 5 % kuviota 13 käytettäessä.

$D = 7 \text{ mm}$  sauvan jännityspinta-ala on 352 mm<sup>2</sup>.

- 64.8 mm<sup>2</sup>: 4 % 1,12, 5 % 1,15
- 352 mm<sup>2</sup>: 4 % 1,02, 5 % 1,03.

Koonvaikutusluvut olisivat siis:

- 4 %:  $k_p = 1,12 / 1,02 = 1,10$
- 5 %:  $k_p = 1,15 / 1,03 = 1,12$

Väsymisrajan ennusteet:

- 4 %:  $\Delta\sigma_R = \Delta\sigma_{R,7} / K_t * k_g * k_p = 937 / 2,25 * 1,02 * 1,1 = 467 \text{ MPa}$
- 5 %:  $\Delta\sigma_R = \Delta\sigma_{R,7} / K_t * k_g * k_p = 937 / 2,25 * 1,02 * 1,12 = 476 \text{ MPa.}$

Nytkin ennusteet ovat hyvin tarkkoja. Ensimmäisessä tuloksessa (4 %) ei hajonnan muutosta ainespaksuuden johdosta siis ole huomioitu: vaikutus ei siten 7 - 20 mm:n aihiohalkaisijoilla ole vielä huomattava.



## LÄHTEET

1. Buch, A. (1988) *Fatigue Strength Calculation*. Trans. Tech., Switzerland-Germany-U.K.-U.S.A.
2. Peterson (1974) *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons Inc., New York.
3. Makkonen, M. *Notch size effects in the fatigue limit of steel*. Int J Fatigue 2003;25:17-26
4. Boller, C, Seeger T. (1987) *Materials Data for Cyclic Loading, Part A: Unalloyed Steels*. Elsevier, Netherlands
5. Socie, D (1995) *Notes on FATIGUE MECHANISMS AND DAMAGE MODELS*. VTT VALB-94, Espoo
6. Socie, D et al. eFatigue.com (web-sivusto väsymismitoitukseen)
7. Köhler, J. *Statistischer Grösseneinfluss im Dauerschwingverhalten ungekerbter und gekerbter metallischer Bauteile*. Dissertation, Technische Universität München; 1975
8. Böhm, J. (1979) *Zur Vorhersage von Dauerschwingfestigkeiten ungekerbter und gekerbter Bauteile unter Berücksichtigung des statistischen Grösseneinflusses*. Dissertation, Technische Universität München
9. Coles, S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag London Limited, 2001
10. Murakami, Y. (1994) *Inclusion Rating by Statistics of Extreme Values and Its Application to Fatigue Strength Prediction and Quality Control of Materials*. Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Volume 99, Number 4, July-August
11. Makkonen, M. (1999) *Size Effect and Notch Size Effect in Metal Fatigue*. Thesis for the degree of Doctor of Science (Technology), Lappeenranta University of Technology. Acta Universitatis Lappeenrantaensis 83
12. Makkonen, M. *Statistical size effect in the fatigue limit of steel*. Int J Fatigue 2001;23:395-402
13. Makkonen, M. *Predicting the total fatigue life in metals*. Int J Fatigue 2009;31:1163-1175
14. Coles, S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag London Limited, 2001

15. Wang, X, Lambert, S.B. *Stress Intensity Factors for Low Aspect Ratio Semi-elliptical Surface Cracks in Finite-thickness Plates Subjected to Nonuniform Stresses* Engineering Fracture Mechanics, Vol. 51, No. 4, pp. 517-532
16. Cameron, A.D.& Smith, R.A. (1982) *Fatigue Life Prediction for Notched Members*. Int. J. Pres. Ves. & Piping 10, pp. 205-217
17. Raju, I.S., Newman, J.C. (1986) *Stress-Intensity Factors for Circumferential Surface Cracks in Pipes and Rods under Tension and Bending Loads*. Fracture Mechanics, Seventeenth Volume, ASTM STP 905, pp. 789-805
18. Tokaji, K., Ogawa, T., Harada, Y., Ando, Z. *Limitations of linear elastic fracture mechanics in respect of small fatigue cracks and microstructure*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol.9 No 1, ;1-14
19. Isida, M et al. (1984) *Tension and Bending of Finite Thickness Plates with a Semi-elliptical Surface Crack*. Int. Journal of Fracture 26, pp. 157-188
20. Magin, W. (1981) *Untersuchung des geometrischen Grösseneinflusses bei umlaufbiegebeanspruchung unter besonderer berücksichtigung technologischer einflüsse*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt
21. Rolfe / Barsom (1977) *Fracture and Fatigue Control in Structures, Applications of Fracture mechanics* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.
22. Haibach, E., Matschke, C. (1981) *Normierte Wöhlerlinien für ungekerbte und gekerbte Formelemente aus Baustahl*. Stahl und Eisen 101: 21-27.