VAASAN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

TÄMÄ ON ALKUPERÄISEN ARTIKKELIN RINNAKKAISTALLENNE

Käytä viittauksessa alkuperäistä lähdettä:

Toimela, T. 2020. Navigaatiofysiikkaa I - Valon kulun geometriaa. Dimensio, 5.2.2020.

URL: https://www.dimensiolehti.fi/navigaatiofysiikkaa-i-valon-kulun-geometriaa/

Versio: käsikirjoitusversio

Copyright: © 2020 Tekijä

Navigaatiofysiikkaa I. Valon kulun geometriaa

T. Toimela

Vaasan Ammattikorkeakoulu

tuomo.toimela@vamk.fi

Matematiikassa ja luonnontieteissä esimerkit arkielämästä motivoivat hyvin oppilaita. Vielä arkielämääkin paremmin toimivat esimerkit juhlasta. Ja mikä onkaan suurempaa juhlaa kuin purjehtiminen, mistä voi löytää hyviä esimerkkejä.

Navigaatiokirjallisuudessa, esim. [1], löytyy laskukaava etäisyyden laskemiseksi majakkaan, silloin kun majakan valo tulee juuri näkyviin horisontin takaa:

$$s = 2{,}08\left(\sqrt{\frac{H}{\mathrm{m}}} + \sqrt{\frac{h}{\mathrm{m}}}\right)\mathrm{M} \tag{1}$$

jossa H ja h ovat majakan (valon) ja silmän korkeudet merenpinnasta. M = meripeninkulma (Nautical mile) = 1852 m. Herää kysymys, miten yllä oleva kaava on saatu.

Tarkastellaan majakan korkeuden H osuutta yhtälössä (1). Kuvassa 1. veneen asema on pisteessä O, majakan huippu pisteessä A. R on maan säde. Etäisyys veneestä majakan juurelle isoympyrää pitkin on kaaren pituus s

$$s = R\varphi = R\cos^{-1}\frac{R}{R+H} \tag{2}$$

Olkoon

$$y = \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} \tag{3}$$

eli

$$\sin\varphi = \sqrt{1-y^2} \tag{4}$$

Yhtälöissä (3) ja (4) on neliöjuuressa vain + merkki, koska kulma φ on terävä. Nyt siis pätee

$$\varphi = \cos^{-1} y = \sin^{-1}\sqrt{1-y^2} \tag{5}$$

Yhtälö (2) voidaan siten kirjoittaa

$$s = R\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+H}\right)^2} = R\sin^{-1}\frac{\sqrt{2RH+H^2}}{R+H} \tag{6}$$

Jatkuvasti derivoituva funktio f(x) voidaan lausua (sarjan suppenemisalueella) origon ympäristössä MacLaurinin sarjana (erikoistapaus yleisemmästä Taylorin sarjasta).

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots \tag{7}$$

Lausutaan yhtälössä (6) arcsin-funktio tämän mukaisesti MacLaurinin sarjana ja otetaan siitä kaksi ensimmäistä termiä. (Huomaa, että koska arcsin-funktio on pariton funktio, niin vain parittomien potenssien termit ovat nollasta poikkeavia funktion MacLaurinin sarjassa.)

$$s \cong R\left(\frac{\sqrt{2RH+H^2}}{R+H} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2RH+H^2}}{R+H}\right)^3 + \cdots\right) \tag{8}$$

Kehitetään tämä edelleen potenssisarjaksi korkeuden *H* mukaan:

$$s = \sqrt{2RH}\cdot\left(1-\frac{5}{12}\cdot\frac{H}{R}+\cdots\right) \tag{9}$$

Ensimmäinen korjaustermi on enimmilläänkin vain joitakin sadastuhannesosia ja voidaan siten unohtaa. Siten saadaan

$$s = \sqrt{2RH} \tag{10}$$

Samaan tulokseen päätyy myös laskemalla suoraa näköetäisyyttä majakan huippuun Pythagoraan lauseesta.

$$s = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH} \cdot \sqrt{1 + \frac{H}{2R}} \tag{11}$$

Kehitetään neliöjuurilauseke yhtälössä (11) taas MacLaurinin sarjaksi, jolloin saadaan

$$s = \sqrt{2RH} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{H}{R} + \cdots\right) \cong \sqrt{2RH} \tag{12}$$

Ensimmäisen korjaustermin kertoimen erilaisuus yhtälöissä (9) ja (12) kuvaa eroa etäisyyksissä mitattuna toisaalta isoympyrää pitkin majakan juurelle ja toisaalta viivasuoraan majakan huippuun.

Nyt meripeninkulman (alkuperäisen) määritelmän perusteella

$$R = \frac{360 \cdot 60\, M}{2\pi} \tag{13}$$

jolloin etäisyydeksi saadaan (majakan osuus)

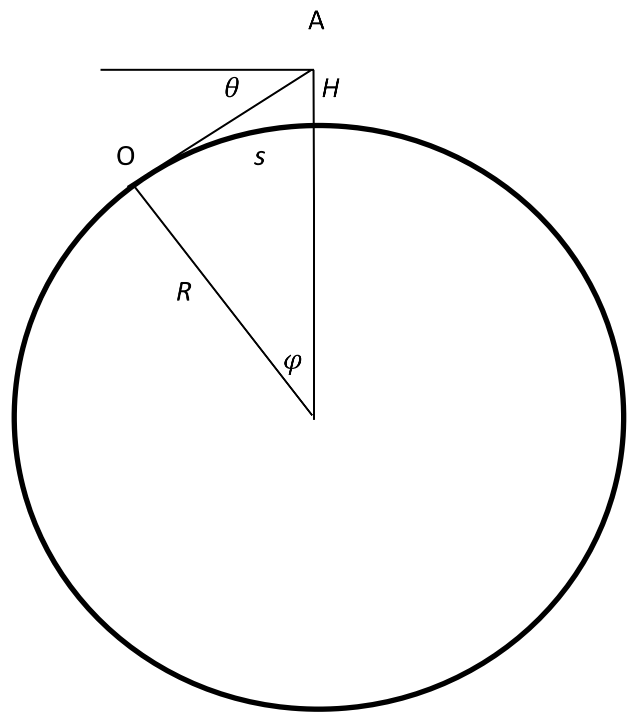
$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 360 \cdot 60\ \mathrm{M}}{2\pi} \cdot \frac{H}{1852\ \mathrm{m}}\ \mathrm{M}} = \sqrt{\frac{360 \cdot 60}{1852\ \pi}} \cdot \sqrt{\frac{H}{\mathrm{m}}}\ \mathrm{M} = 1{,}927\ \mathrm{M} \sqrt{\frac{H}{\mathrm{m}}} \tag{14}$$

Tämä geometrinen tulos poikkeaa yhtälöstä (1) noin 8 %. Syy eroavaisuuteen löytyy siitä, että yhtälössä (14) ei ole otettu huomioon valon taittumista, vaan on oletettu valon kulkevan viivasuoraan. Tätä valon taittumista ilmakehässä tarkastellaan tämän kirjoitussarjan toisessa osassa [2].

Lähdeviitteet

[1] Suomen Navigaatioliitto: Veneilijän merenkulkuoppi II, Rannikko-navigointi, Unigrafia Oy, Helsinki, 2013

[2] T. Toimela, Navigaatiofysiikkaa II, Dimensio, Helmikuu 2020



Kuva 1.