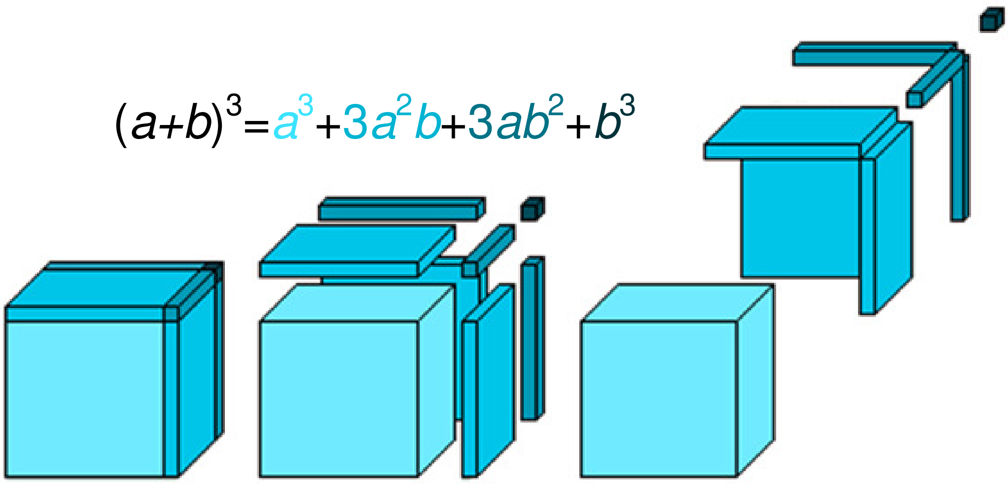
Timo Ojala ja Timo Ranta

Matematiikan perustietojen kertaus

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



MATEMATIIKAN OPISKELUSTA JA SOVELTAMISESTA

Matematiikka on jatkuvasti kehittyvä itsenäinen tiede. Matematiikassa tutkitaan matemaattisia rakenteita loogisin päättelysäännöin. Matematiikan hyödynnettävyys perustuu sen abstraktisuuteen; matematiikkaa voi soveltaa monissa täysin erityyppisissä asiayhteyksissä.

Matematiikkaa sovelletaankin nykyään lähes kaikilla inhimillisen toiminnan alueilla. Luonnontieteet ja tekniikan eri alat ovat perinteisiä matemaattisten menetelmien sovellusalueita. Matematiikkaa käytetään kuitenkin runsaasti myös muilla alueilla kuten esimerkiksi lääketieteessä, talouselämässä ja tietojenkäsittelyssä.

Matematiikan soveltaminen ongelmanratkaisussa voidaan jakaa neljään eri vaiheeseen:

1. Reaalimaailman ongelman muuttaminen matemaattiseen muotoon.
2. Matemaattiseen muotoon muutetun ongelman ratkaiseminen matematiikan keinoja käyttäen.
3. Saadun ratkaisun tarkastelu kriittisesti alkuperäisen ongelman kannalta.
4. Ongelmanratkaisun dokumentointi niin hyvin, että muidenkin on mahdollista ymmärtää ratkaisun vaiheet.

Matematiikan opiskeleminen on hyödyllistä, vaikkei työssään aktiivisesti suorittaisikaan matemaattisia laskelmia. Matematiikan opiskelu opettaa systemaattisuutta ja loogista johdonmukaisuutta, mitkä ovat arvokkaita taitoja laajojen asiakokonaisuuksien jäsentelyssä.

Matematiikan opiskelu on opetukseen osallistumista, lukemista, pohtimista ja harjoittelua. Luentojen seuraaminen ei yksistään riitä matematiikkaa opiskeltaessa. Matematiikan opiskelussa tärkeintä on oma työnteko. Omatoimiseen lukemiseen, pohtimiseen sekä harjoitteluun tulee käyttää ainakin yhtä paljon aikaa kuin ohjattuun opiskeluun.

Matemaattinen tieto voidaan jakaa proseduraaliseen tietoon ja konseptuaaliseen tietoon. Proseduraalinen tieto tarkoittaa matemaattisten rutiinimenetelmien käyttötaitoa, jota tarvitaan esimerkiksi kerto- ja jakolaskujen suorittamisessa, murtolausekkeiden sieventämisessä sekä ratkaistaessa vaikkapa toisen asteen yhtälöä ratkaisukaavan avulla. Matemaattisten menetelmien käyttötaitoa opitaan harjoittelun kautta, jolloin ”laskuvirheiden” vähentyessä yleinen laskentavarmuus kasvaa.

Konseptuaalinen tieto on puolestaan käsitteiden merkitysten ja niiden välisten suhteiden ymmärtämistä. Konseptuaalista tietoa tarvitaan, kun matematiikkaa halutaan hyödyntää laskijalle itselleen uusissa yhteyksissä. Ymmärrys käsitteiden merkityksestä ja niiden välisistä suhteista kasvaa vähitellen sekä sopivien sovellusesimerkkien että omien pohdiskelujen myötä.

Matematiikan opiskelu on kumulatiivista, jolloin uudet asiat perustuvat aiemmin opittujen varaan. Mitä paremmin esitiedot ovat hallinnassa, sitä helpompaa on myös uusien asioiden opiskelu. Helpoiltakin tuntuvien asioiden harjoitteluun kannattaa suhtautua vakavasti, sillä usein asiat vaikeutuvat huomaamatta. Vaikka tämänkin kertausoppaan asiat saattavat tuntua hyvin tutuilta, niin niiden hallinta kannattaa varmistaa suorittamalla oppaan harjoitustehtävät ja tarkistamalla ratkaisujen oikeellisuus huolellisesti. Erityisesti merkintöihin kannattaa kiinnittää huomiota alusta alkaen, sillä tarkoituksenmukaiset merkinnät ovat välttämättömiä matematiikan opiskelun edetessä.

Tämän kertausoppaan tarkoituksena on palauttaa mieleen perusalgebran keskeisimmät käsitteet ja menetelmät joko itsenäisesti opiskellen jo ennen jatko-opintojen aloittamista tai viimeistään heti jatko-opintojen alkaessa, jolloin tukea voi saada myös opiskelutovereilta ja oman oppilaitoksen matematiikan opettajilta. Puutteelliset perusalgebran tiedot vaikeuttavat matematiikan jatko-opintoja huomattavasti. Tiedot kannattaakin täydentää viimeistään opintojen alussa sen sijaan, että antaisi puutteellisten tietojen tai jopa virheellisten käsitysten haitata matematiikan jatko-opiskelua ja soveltamista oman alan ammattiaineisiin.

Kertausopas jakautuu kolmeen osaan:

1. Sivuilla 5–46 esitetään tarvittavaa teoriaa: käsitteitä, laskusääntöjä ja esimerkkejä.
2. Sivuilla 47–55 on annettu viitisenkymmentä harjoitustehtävää, jotka testaavat matematiikan perusteiden hallintaa.
3. Sivuilla 56–71 on useimpien em. tehtävien malliratkaisut tai ainakin vastaukset ratkaisuohjeineen.

Perusalgebran menetelmien hallintaa voit testata ja kehittää eri tavoin riippuen omista lähtötiedoistasi:

- Jos osaat ratkaista Osan 2 harjoitustehtävät, niin vertaa joka tapauksessa ratkaisujasi oppaan malliratkaisuihin. Jos ratkaisusi ovat oikein ja olet löytänyt ne jollakin systemaattisella tavalla ilman kokeiluja, niin matematiikan perustietosi ovat kunnossa. Huomaa kuitenkin, että ulkopuolisenkin lukijan on ymmärrettävä käyttämäsi merkinnät, laskujesi perusteet, laskusuoritustesi välivaiheet sekä esittämäsi lopputulos. Tulevan asiantuntijan on tietenkin pystyttävä ymmärrettävästi perustelemaan ja selittämään laskelmansa; ei riitä pelkästään se, että asiantuntija on itse sitä mieltä, että tulos on oikea, vaan tulokset helposti ymmärrettävine perusteluineen on alistettava kriittiseen tarkasteluun. Myös silloin kun asiantuntija haluaa kysyä neuvoa muilta oman alan osaajilta, tulee hänen kyetä ymmärrettävästi selittämään tilanteensa siihen liittyvine ongelmineen.

- Jos Osan 2 harjoitustehtävät tuntuvat vaikeilta, niin lue ensin kertausoppaasta kyseiseen tehtävään liittyvä teorialuku esimerkkeineen ja yritä uudelleen. Opiskelun tukena kannattaa käyttää myös omia, jo entuudestaan tuttuja oppikirjoja. Mikäli vieläkään et osaa ratkaista tehtävää, niin katso mahdollista malliratkaisua tai ratkaisuohjetta oppaan lopusta. Malliratkaisun puhtaaksikirjoittaminen paperille on myös hyvä tapa syventyä asiaan. Jos et ymmärrä annettua ratkaisua tai selitystä, niin palaa asiaan uudelleen vähän myöhemmin. Jos et silloinkaan ymmärrä ratkaisua, niin merkitse tehtävä muistiin, jotta kysyisit asiasta opiskelutovereiltasi tai omalta matematiikan opettajaltasi heti jatko-opintojesi alkaessa.

Perehtymällä huolellisesti kertausoppaan teoriaan ja laskuesimerkkeihin varmistat kunnon pohjatiedot sekä matematiikan opintojaksoille että matematiikan soveltamiselle oman alasi ammattiaineissa.

Menestystä alkaville jatko-opinnoillesi toivovat

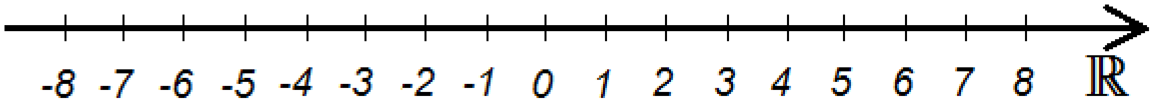
Timo Ojala, FL
Matematiikan yliopettaja SAMK
timo.ojala@samk.fi

Timo Ranta, TkT
TTY, Porin laitos
timo.ranta@tut.fi

SISÄLLYSLUETTELO

1. LUKUJEN NIMITYKSISTÄ JA ESITYKSISTÄ

Tässä kertausoppaassa tarkastellaan laskemista lukusuoralta löytyvillä luvuilla, joita sanotaan **reaaliluvuiksi**.



Jokainen lukusuoran piste voidaan ”nimetä” yhdellä (tarvittaessa päättymättömällä) desimaaliluvulla ja toisaalta jokainen desimaaliluku voidaan sijoittaa lukusuoralle.

Lukusuoralla on seuraavat luvut:

1. **Positiiviset kokonaisluvut** eli **luonnolliset luvut** 1, 2, 3, …
2. **Nolla** 0, jota usein pidetään myös yhtenä luonnollisena lukuna.
3. **Negatiiviset kokonaisluvut** $-1,\ -2,\ -3,\ ...$
4. **Murtoluvut**, jotka ovat kokonaislukujen m ja $n(\neq 0)$ osamäärinä $\frac{m}{n}$ esitettävissä olevia lukuja**.** Myös jokainen kokonaisluku m voidaan tulkita murtoluvuksi, koska se voidaan esittää murtolukumuodossa $\frac{m}{1}$. Matematiikassa näitä kaikkia murtolukuja sanotaan **rationaaliluvuiksi.**
5. Lukusuoralla on rationaalilukujen lisäksi muitakin lukuja. Näitä **irrationaalilukuja** käsitellään tarkemmin seuraavalla sivulla.

Huomautus. Voidaan osoittaa, että jokaisen rationaaliluvun desimaaliesitys on joko **päättyvä** tai **päättymätön ja jaksollinen**.

Jos murtoluvun nimittäjän alkutekijöinä on vain lukuja 2 ja 5, niin tarvittaessa sopivasti laventamalla nimittäjään saadaan kympin potenssi, jolloin jakolasku on helppo suorittaa ja lopputuloksena on päättyvä desimaaliluku. Esimerkiksi

$$\frac{103}{2\cdot 5^2} \overset{2)}{=} \frac{103}{2\cdot 5^2} = \frac{2\cdot 103}{(2\cdot 5)^2} = \frac{206}{10^2} = 2.06 \quad \text{ja} \quad \frac{789}{2^5\cdot 5^3} \overset{5^2)}{=} \frac{789}{2^5\cdot 5^3} = \frac{19725}{10^5} = 0.19725\ .$$

Myöhemmin jakolaskualgoritmin yhteydessä meidän on itsekin helppo todeta, että jos supistetussa muodossa olevan murtoluvun nimittäjässä n on muitakin alkutekijöitä kuin 2 ja 5, niin murtoluvun päättymätön desimaaliesitys on varmasti jaksollinen ja jakson pituus on enintään $n-1$ numeromerkkiä.
Vaikkapa laskimella voi todeta, että esimerkiksi

$$541/44 = 12.29545454... \overset{\text{merkitään}}{=} 12.29\overset{\frown}{54},$$

missä yläpuolisella kaarella merkitty numerojono 54 näyttää toistuvan luvun desimaaliesityksessä kaarikohdasta alkaen ilman muita numeroita. Myöhemmin itse laskemalla saamme varmuuden, että äärettömän pitkälle toistuvassa jaksollisuudessa ei ole missään vaiheessa pienintäkään poikkeamaa. Vastaavasti

$$16/13 = 1.230769\,230769\,230769\,23... = 1.\overset{\frown}{230769}\ .$$

Kääntäen: Jokainen desimaaliluku, jonka desimaaliesitys on päättyvä tai päättymätön ja jaksollinen, voidaan esittää murtolukuna seuraavien esimerkkien mukaisesti.

Jokainen päättyvä desimaaliluku voidaan muuttaa murtoluvuksi laventamalla sopivalla kympin potenssilla seuraavien esimerkkien mukaisesti.

Esimerkki. $\underset{\text{tuhannesosa}}{4.56\underset{\uparrow}{7}} = \dfrac{4567}{\underbrace{1000}_{\text{tuhat}}}$, $\underset{\text{miljoonasosa}}{-87.654321\!\!\underset{\uparrow}{\ }} = \dfrac{-87654321}{\underbrace{1000000}_{\text{miljoona}}}$

Esimerkki. Esitetään murtolukuna päättymätön jaksollinen desimaaliluku $x = 8.9\overset{\frown}{123}$, jonka jakson pituus on 3. Suoritetaan vähennyslasku $10^{3} \cdot x - x$ allekkain:

$$\begin{aligned} 1000x &= 8912.3123123... \\ x &= \quad\ \ 8.9123123... \\ \hline 999x &= 8903.4 \end{aligned}$$

Koska x kerrottiin luvulla 10^3, niin desimaaliesitysten kolmen numeromerkin mittaiset jaksot osuvat lopussa kohdakkain. Vähennetään ylemmästä yhtälöstä alempi, jolloin kohdakkain osuvat jaksot häviävät ja erotus on päättyvä desimaaliluku.

$999x = 8903.4 \quad | :999$

$$x = {}^{10)}\frac{8903.4}{999} = \frac{89034}{9990}$$

| Tätä voisi vielä supistaa, mutta se ei ole välttämätöntä.

Huomautus. Lukusuoralla on myös sellaisia desimaalilukuja, joiden desimaaliesitys on päättymätön ja jaksoton. Tällaiset päättymättömät ja jaksottomat desimaaliluvut eivät voi edellisen sivun huomautuksen perusteella olla murtolukuja eli rationaalilukuja, joten niitä sanotaan **irrationaaliluvuiksi**.

Esimerkki. Luvun $a = 1.\underbrace{2}_{1}1\underbrace{22}_{2}1\underbrace{222}_{3}1\underbrace{2222}_{4}1\underbrace{22222}_{5}1\underbrace{222222}_{6\text{ kakkosta}}1\ldots_{\ldots}$ desimaaliesityksessä ei ole mitään numerojonoa, joka toistuisi samanlaisena äärettömän monta kertaa peräkkäin, koska ykkösten välissä olevien kakkosten määrä lisääntyy aina yhdellä. Niinpä luku a ei voi olla esitettävissä murtolukuna, koska jokaisen murtoluvun desimaaliesitys on joko päättyvä tai päättymätön ja jaksollinen.

Voidaan osoittaa, että myös luvun pii $\pi = 3.1415926535...$ ja monien neliöjuurten kuten $\sqrt{2} = 1.414213562...$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, ...$ desimaaliesitykset ovat päättymättömiä ja jaksottomia, joten nämä luvut ovat irrationaalisia.
Voidaan osoittaa, että kokonaisluvun neliöjuuri on rationaalinen vain, jos juurrettava luku on neliöluku 0, 1, 4, 9, 16, 25, …

2. PERUSLASKUTOIMITUKSISTA JA NIIDEN SUORITTAMISESTA

Yhteenlaskua merkitään symbolilla +, esimerkiksi $5+2=7$ ja $a+a=2\cdot a$. Summalausekkeen yhteenlaskettavia sanotaan **termeiksi.**

Kahta lukua sanotaan toistensa **vastaluvuiksi**, jos niiden summa on nolla. Esimerkiksi 2 ja -2 ovat toistensa vastalukuja, koska $2+(-2)=0$.

Kahden luvun vähennyslasku $5-2=3$ voidaan tulkita vastaluvun lisäämiseksi, esimerkiksi $5-2=5+(-2)=3$. **Erotusta** $5-2$ **voidaan siis sanoa summaksi**, jonka termit ovat 5 ja -2.

Kertolaskun symbolina tässä kertausoppaassa käytetään perusriviltä korotettua pistettä, esimerkiksi $2\cdot 3=6$. Keskenään kerrottavat luvut 2 ja 3 ovat tulon **tekijät**.

Sekä käsin kirjoituksessa että painetussa tekstissä kertolaskun kertomerkki jätetään usein merkitsemättä, niinpä $2\cdot a=2a$, $a\cdot 2=a2$, $a\cdot b=ab$, $a\cdot(x+1)=a(x+1)$, ...

Huomautus. Erityisesti tietoteknisissä apuvälineissä merkinnät $a2$ ja ab tarkoittavat usein vastaavanlaisia muuttujanimiä kuin yksikirjaimisetkin nimet a ja b ja siksi kertomerkkiä ei ainakaan tällaisissa yhteyksissä saa jättää merkitsemättä, jos tarkoitetaan kahden tekijän tuloa. Merkintä $a(x+1)$ tarkoittaa puolestaan usein funktion a arvoa muuttujan arvolla $x+1$ (eli kohdassa $x+1$).

Sekaannusten välttämiseksi tässä oppaassa ainakin tällaisiin monitulkintaisiin kohtiin merkitään kertomerkki useimmiten näkyviin. **Vaikka kertomerkin tavallista runsaampi käyttö tämänkin kertausoppaan painetussa tekstissä vaikuttaa turhalta ja kummalliselta, niin kertomerkin näkyviin kirjoittamista kannattaisi matemaattisen tekstin käsinkin kirjoituksessa harjoittaa, jotta tietoteknisiä apuvälineitä käytettäessä ei tapahtuisi kohtalokkaita erehdyksiä.**

Huomaa, että esimerkiksi lukujen 2 ja 5 kertolaskua ei saa milloinkaan kirjoittaa ilman kertomerkkiä muodossa 25 , koska käytössä olevan **lukujen kymmenkantaisen paikkajärjestelmän** mukaan

merkintä **25** tarkoittaa lukua **2 × kymmenen + 5 × yksi = kaksikymmentäviisi** .

Kahta lukua sanotaan toistensa **käänteisluvuiksi**, jos niiden tulo on yksi. Esimerkiksi luvut $\frac{2}{5}$ ja $\frac{5}{2}$ (eli 0.4 ja 2.5) ovat toistensa käänteislukuja, koska $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=1$.

Jakolasku voidaan merkitä esimerkiksi seuraavasti $\frac{6}{2} = 6/2 = {}^{6}\!/\!_{2} = 6:2 = 3$.

Luvulla jakamista voidaan pitää käänteisluvun kertomisena: $6:2 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 0.5 = 3$.

Näin ollen jakolaskulauseketta voidaan pitää tulolausekkeena, jossa tekijöinä on jaettava ja jakajan käänteisluku.

Monissa tietoteknisissä apuvälineissä syöte joudutaan kirjoittamaan perusriville ilman perusrivin ylä- tai alapuolisia merkintöjä. Niinpä **potenssiin korotus** ilmaistaan apuvälineitä käytettäessä usein ”**hattumerkillä**” ^ , esimerkiksi $2^3 = 2\text{^}3 = 8$.
Joissakin laskimissa potenssiin korotus tapahtuu näppäimellä Y^x.

Määritelmä. Luvun *a* **neliöjuuri** $\sqrt{a}$ tarkoittaa sitä ei-negatiivista lukua, jonka neliö on juurrettava.

Esimerkki. $\sqrt{9} = 3$, sillä $3^2 = 9$ ja $3 \geq 0$.

Lauseketta $\sqrt{-4}$ ei voida sieventää reaaliluvuksi, koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen.

Neliöjuuren arvo lasketaan tavallisesti laskimella, mutta sinun kannattaa opetella tunnistamaan ainakin seuraavat neliöluvut 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, joiden neliöjuuret ovat luonnollisia lukuja 1, 2, 3, …, 13, 14, 15.

Lause. Jos *a* ja *b* ovat positiivisia, niin $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ja $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Esimerkki. $\sqrt{8100} = \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$

$$\sqrt{\frac{121}{49}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}} = \frac{11}{7}$$

Huomautus. Summalausekkeen neliöjuurta ei voi laskea termeittäin. Niinpä

$\sqrt{25+144}$ ei ole $\sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$, vaan $\sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$,

$\sqrt{169-25}$ ei ole $\sqrt{169} - \sqrt{25} = 13 - 5 = 8$, vaan $\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$.

Määritelmä. Luvun a **kuutiojuuri** $\sqrt[3]{a}$ tarkoittaa lukua, jonka kuutio on juurrettava.

Esimerkki. $\sqrt[3]{8} = 2$, sillä $2^3 = 8$, ja $\sqrt[3]{-125} = -5$, sillä $(-5)^3 = -125$.
Kuutiojuurenkin arvo lasketaan tavallisesti laskimella, mutta opettele tunnistamaan kymmenen ensimmäistä kuutiolukua 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Lause. $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (edellyttäen, että $b \neq 0$) **.**

Määritelmä. Luvun a **itseisarvo** $|a|$ määritellään ehdosta $|a| = \begin{cases} a, \text{ jos } a \geq 0 \\ -a, \text{ jos } a < 0 \end{cases}$.

Esimerkki. $|2| = 2$, $|-3| = 3$,
$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}$, sillä $1 - \sqrt{2} < 0$

3. KERTO- JA JAKOLASKUALGORITMIT

Tämän kertausoppaan kirjoittajat korostavat omassa opetuksessaan hyvin voimakkaasti tehokkaan symbolisen laskimen ja/tai matematiikkaohjelman käyttöä.

Kuitenkin monien teoreettisten tulosten ymmärtäminen edellyttää, että tiedämme, miten sellaisetkin rutiininomaiset laskuoperaatiot kuten kerto- ja jakolasku käytännössä todella suoritetaan. Ilman tällaista tietoa et voi esimerkiksi laskimen antaman likiarvotuloksen

$$65/7 \approx 9.\,285714\;285714\;285714\;285714\;28\ldots$$

perusteella ymmärtää, miksi numerojono 285714 toistuu tässä desimaaliesityksessä äärettömän monta kertaa peräkkäin ilman yhtään poikkeamaa. Jos et ymmärrä jakolaskualgoritmia, et voi edes tietokoneen tulostaman miljoonan ensimmäisen desimaalin perusteella olla varma, ettei ehkä jo ensimmäinen laskematta jäänyt desimaali riko säännönmukaisuutta.

Jakolaskualgoritmin mekaanisen suorituksen hallinta auttaa kuitenkin ymmärtämään, että jokaisen murtoluvun desimaaliesitys on joko päättyvä tai päättymätön ja jaksollinen. Opit myös ymmärtämään, mikä on kulloinkin tällaisen jakson suurin mahdollinen pituus. Niinpä jo varsin lyhyestä (laskimen tulostamasta) likiarvosta $65/7 \approx 9.285714$ voit varmuudella sanoa jakson olevan kuuden merkin mittainen numerojono 285714.

Lisäksi tenteissäkin on tilanteita, joissa laskinta ei saa käyttää. Toisaalta erikoistapauksissa laskin ei pysty ilmiselvän päässälaskunkaan suorittamiseen.

Siksi seuraavassa palautetaan mieleen lukujen kerto- ja jakoalgoritmit.

Esimerkki. Suoritetaan kertolasku $1.23 \cdot 78.9$.

Kirjoitetaan luvut ilman desimaalipisteitä allekkain, alemmaksi mieluummin lyhyempi luku, viimeiset numerot samalle kohtaa. Pienellä kirjasinkoolla on ensin selitetty kolmosella tapahtuvat kertolaskut, sitten kakkosella ja sitten vielä ykkösellä tapahtuvat. Tulon numeromerkit saadaan lopuksi laskemalla yhteen kertomalla saatujen rivien luvut:

$$
\begin{array}{cccccl}
 & & & 7 & 8 & 9 \\
\times & & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & & 2 & 3 & 6 & 7 \quad \scriptstyle 3\cdot 9 = 27,\ 7 \text{ alas, 2 muistiin };\ 3\cdot 8+2 = 26,\ 6 \text{ alas, 2 muistiin };\ 3\cdot 7+2 = 23 \text{ alas} \\
 & 1 & 5 & 7 & 8 & \quad \scriptstyle 2\cdot 9 = 18,\ 8 \text{ alas, 1 muistiin };\ 2\cdot 8+1 = 17,\ 7 \text{ alas, 1 muistiin };\ 2\cdot 7+1 = 15 \text{ alas} \\
+ & 7 & 8 & 9 & & \quad \scriptstyle 1\cdot 9 = 9 \text{ alas };\ 1\cdot 8 = 8 \text{ alas };\ 1\cdot 7 = 7 \text{ alas} \\
\hline
9 & 7 & 0 & 4 & 7 &
\end{array}
$$

Koska tulolausekkeen arvo on likimain $1.2 \cdot 80 = 96$, niin oikea vastaus on 97.047 .

Desimaalipisteen paikan voi määrittää myös toisin: Loppusummassa jätetään desimaalipisteen taakse niin monta numeroa kuin niitä on pisteen jälkeen kummassakin keskenään kerrottavassa luvussa yhteensä. Tässä tapauksessa toisessa kerrottavista luvuista on kaksi numeroa pisteen jälkeen, toisessa yksi. Tulossa on siis jätettävä desimaalipisteen taakse yhteensä kolme numeroa.

Esimerkki. Suoritetaan jakolasku $\dfrac{876}{7}$ "uuden jakokulman" avulla.

```
    1 2 5.1 4 2 8 5 7 1 4
7  |8 7 6.0 0 0 0 0 0 0 0
    7
    1 7
    1 4
      3 6
      3 5
        1 0
          7
          3 0
          2 8
            2 0
            1 4
              6 0
              5 6
                4 0
                3 5
                  5 0
                  4 9
                    1 0
                      7
                      3 0
                      2 8
                        2
```

Lopuksi perustellaan, että tämän osamäärän desimaalilukuesitys on jaksollinen ja jakson pituudelle voidaan jo ennen jaon suorittamista nähdä yläraja

$$\text{jakson pituus} \le \text{jakaja} - 1 = 7 - 1 = 6 .$$

Wikipediassa on hakusanan Jakokulma kohdalla annettu jakolaskun suorittamiselle muistisääntö

"*Jaa, kerro, vähennä, luku alas pudota, alusta taas aloita*".

Ensimmäiseksi jaettava 876 nolladesimaaleineen kirjoitetaan jakokulman sisään ja jakaja 7 sen eteen. Sitten edetään Wikipediassa esitetyn muistisäännön mukaisin vaihein:

1. **Jaa** – Jaetaan jaettavan satojen numero 8 jakajalla 7, jolloin osamääräksi saadaan 1 ja jää vielä vähän ylikin. Osamääräksi saatu luku 1 (sata) kirjoitetaan jaetun luvun 8 (sataa) yläpuolelle. (Jos luvun 8 paikalla olisi ollut jakajaa 7 pienempi luku, niin tämän pienemmän luvun perään otettaisiin jaettavasta mukaan kymppienkin numero.)

2. **Kerro** – kerrotaan osamäärään kirjatulla numerolla 1 jakaja 7 ja merkitään tulon $1 \cdot 7$ arvo 7 jaetun numeron 8 alle.
3. **Vähennä** – vähennetään jaetusta numerosta 8 alapuolelle merkitty tulo 7. Erotukseksi saadaan 1 (sata), joten jaettavasta on vielä jäljellä yksi satanenkin.
4. **Luku alas pudota** – pudotetaan jaettavan kymppien numero 7 erotuksen 1 viereen.
6. **Alusta taas aloita** – nyt jaettavaksi otetaan viivan alle saatu luku 17 (kymppiä). Jaetaan 17 (kymmentä) jakajalla 7, jolloin saadaan 2 (kymmentä), mikä merkitään osamäärän toiseksi numeroksi. Kerrotaan $2 \cdot 7 = 14$, joka vähennetään luvusta 17. Erotuksen 3 (kymmentä) perään pudotetaan numero 6, luku 36 (ykköstä) jaetaan 7:llä, jolloin saadaan 5 (ykköstä), mikä merkitään ylös kuutosen yläpuolelle. Kerrotaan $5 \cdot 7 = 35$, joka vähennetään ja jakojäännökseksi jää 1.

Jakolasku voitaisiin lopettaa jo tässä vaiheessa ja ilmoittaa, että (vaillinainen) osamäärä on 125 ja jakojäännös 1 (kokonainen yksikkö).

Vastauksen voisi ilmoittaa myös sekalukuna $125\frac{1}{7}$.

Nyt jakoa jatketaan kuitenkin pidemmälle siirtymällä desimaaleihin.

7. Pudotetaan seuraava numeromerkki 0, saatu luku 10 (kymmenesosaa) jaetaan 7:llä, saadaan 1 (kymmenesosa), joka merkitään ylös. Kerrotaan $1 \cdot 7 = 7$, joka vähennetään 10:stä ja jäljelle jää 3 (kymmenesosaa). Pudotetaan seuraava 0 alas, saatu luku 30 (sadasosaa) jaetaan 7:llä, saadaan 4 (sadasosaa), joka merkitään ylös. Kerrotaan $4 \cdot 7 = 28$, joka vähennetään 30:stä ja jäljelle jää 2 (sadasosaa). Näin jatketaan, kunnes osamäärä on saatu halutulla tarkkuudella.

Esimerkissämme $\dfrac{876}{7} \approx 125.14285714$. Lisäksi jää vielä jakojäännös 2 sadasmiljoonasosaa, joka ei riitä pyöristämään viimeistä laskettua desimaalia ylöspäin. Jotta seiskalla jako pyöristyisi ylöspäin, jakojäännöksen pitäisi olla vähintään 4. Jakolaskumme lopputuloksen voi tarkistaa ehdosta

$$\boxed{\text{Jaettava} = \text{jakaja} \times \text{osamäärä} + \text{jakojäännös}}$$

Koska $876 = 7 \cdot 125.142\,857\,14 + 0.000\,000\,02$, niin ehto toteutuu tarkalleen, joten jakolasku on suoritettu oikein.

Mistä me sitten voimme tietää, että osamäärä on jaksollinen ja jaksona on lukujono 142857?

Mahdolliset jakojäännökset seiskalla jaettaessa ovat kussakin vaiheessa luvut 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Jos ykkösten jakamisen jälkeen jakojäännökseksi jää jossakin vaiheessa 0, niin jako menee tasan ja osamäärä on päättyvä desimaaliluku. Nyt ykkösten jakamisen jälkeen jakojäännökseksi jäi 1. Seuraavat jakojäännökset olivat 3, 2, 6, 4, 5 ja 1 uudelleen. Saman nollasta eroavan jakojäännöksen uuden esiintymän on tapahduttava seiskalla jaettaessa viimeistään kuuden jaon jälkeen, koska nollasta eroavia jakojäännöksiä on nyt vain kuusi. Koska varsinainen kokonaislukujaettava 876 oli jo ”pudotettu” kokonaan alas, niin em. jakojäännösten perään ”pudotetaan” aina nolla. Näin laskumme jatkuu samanlaisena aina kuuden suorituksen välein. Jos et tätä usko, niin jatkapa laskuja vaikka pari kuudenmittaista kierrosta, niin ymmärrät kovin hyvin idean.

Esimerkki. Suoritetaan desimaalilukujen jakolasku $\dfrac{21.81115}{0.0507}$.

Koska tämän osamäärän arvo on likimain [20] $\dfrac{22}{0.05} = \dfrac{440}{1} = 440$, niin osamäärässä desimaalipiste tulee kolmen ensimmäisen numeromerkin perään. Seuraavassa jätämmekin desimaalipisteet pois laskuista ja määritämme vain osamäärään tulevat numeromerkit, jotka ilmestyvät laskujen kuluessa ylimmälle riville 1.

Riville 2 kirjoitamme jakajan numeromerkit 507 ja sen perään jakokulman sisään jaettavan numeromerkit. Jakajan alussa ja lopussa sekä jaettavan alussa mahdollisesti olevat nollat voidaan tässä vaiheessa unohtaa, koska ne vaikuttavat vain osamäärän suuruusluokkaan, eivät osamäärän numeromerkkeihin. Jakajan ja jaettavan sisällä olevia nollia ei saa kuitenkaan jättää pois. Jaettavan loppuun voidaan lisätä nollia tarpeellinen määrä.

```
         0 0 0 4 3 0 2 0 0 1 9      1
507     |2 1 8 1 1 1 5 0 0 0 0      2
       - 2 0 2 8                    3
           1 5 3 1                  4
         - 1 5 2 1                  5
               1 0 1 5              6
             - 1 0 1 4              7
                     1 0 0 0        8
                   -   5 0 7        9
                       4 9 3 0     10
                     - 4 5 6 3     11
                         3 6 7     12
```

Otamme jaettavasta jakoon aina yhden uuden numeromerkin kerrallaan ja tutkimme, kuinka monta 507:n monikertaa voidaan muodostuneesta luvusta vähentää. Otetaan rivin 2 ensimmäinen numero 2 jakoon. Siitä voidaan vähentää 0 kertaa 507, joten jakoon otetun luvun 2 yläpuolelle merkitään 0.
Seuraavaksi otamme jakoon numeron 1 ja muodostuneesta luvusta 21 voidaan vähentää 0 kertaa 507, joten jakoon otetun numeron 1 yläpuolelle merkitään 0.
Seuraavaksi otamme jakoon numeron 8 ja muodostuneesta luvusta 218 voidaan vähentää 0 kertaa 507, joten jakoon otetun numeron 8 yläpuolelle merkitään 0.
Seuraavaksi otamme jakoon numeron 1 ja muodostuneesta luvusta 2181 voidaan vähentää 4 kertaa 507 eli riville 3 kirjattu luku 2028. Viimeksi jakoon otetun numeron 1 yläpuolelle merkitään 4. Vähennyslaskun $2181-2028$ tulos 153 merkitään näkyviin viivan alle riville 4.
Seuraavaksi otetaan jakoon mukaan numero 1 ja muodostuvan luvun 1531 alle kirjataan siitä vähennettävä jakajan 507 monikerta $3 \cdot 507 = 1521$. Erotus $1531-1521=10$ merkitään riville 6 ja jakoon otetun numeron 1 päälle merkitään monikertojen lukumäärä 3.
Otettaessa jakoon seuraava numero 1 muodostuu luku 101, josta ei voi vähentää yhtään 507:n monikertaa. Niinpä jakoon otetun numeron 1 yläpuolelle kirjataan 0.
Ottamalla jakoon seuraava numero 5 saadaan luku 1015, josta voidaan vähentää riville 7 merkitty monikerta $2 \cdot 507 = 1014$. Monikertojen määrä 2 merkitään yläriville.

Jaettavan loput numeromerkit ovat nollia, joita onkin otettava jakoon kolme ennen kuin muodostuneista luvuista 10, 100 ja 1000 voidaan vähentää yhden kerran 507. Niinpä yläriville merkitäänkin kaksi nollaa ja sitten ykkönen. Erotuksen $1000-507$ alle kirjataan sen arvo 493. Ottamalla vielä jakoon 0 saadaan luku 4930, josta voidaan vähentää $9\cdot 507=4563$. Yläriville merkitään 9 ja alas laskutoimitus $4930-4563=367$.

Näin olemme saaneet $\frac{21.81115}{0.0507}\approx 430.20019...$

4. LASKUTOIMITUSTEN SUORITUSJÄRJESTYKSESTÄ

Tässä luvussa tarkasteltavat **lausekkeet** muodostuvat

- luvuista (1, 0, 7/23 , -0.2, π, …)
- lukuja esittävistä kirjaimista (a, b, … , x, y, …)
- laskutoimituksista $(+,\ -,\ \times,\ /,\ \hat{}\ ,\sqrt{\ },\ \sqrt[3]{\ }\ )$
- sulkumerkeistä.

Numeerisessa lausekkeessa ei esiinny lukuja esittäviä kirjaimia.

Lausekkeen **sieventäminen** (eli **pelkistäminen)** tarkoittaa lausekkeen kirjoittamista uuteen, mahdollisimman yksinkertaiseen ja käyttökelpoiseen muotoon, joka on alkuperäisen lausekkeen suuruinen.

Sen merkiksi, että sievennettäessä lausekkeen arvo säilyy samana, lausekkeen eri muotojen väliin kirjoitetaan yhtäsuuruusmerkit.

Numeerinen lauseke sievennetään tavallisesti laskemalla lausekkeen arvo.

Huomautus. Lausekkeen arvoa laskettaessa lausekkeeseen merkityt **laskutoimitukset on suoritettava sovitussa järjestyksessä:**

1. Lasketaan ensin sulkeiden sisällä olevat osalausekkeet aloittaen sisimpien sulkeiden sisältä
2. Potenssiin korotukset ja juuret
3. Kerto- ja jakolaskut
4. Yhteen- ja vähennyslaskut.

Samanarvoiset laskutoimitukset suoritetaan vasemmalta oikealle.

Sovitusta laskujärjestyksestä voidaan kuitenkin poiketa käyttäen sopivia laskulakeja myöhempien esimerkkien mukaisesti.

Esimerkki. Seuraavassa sievennettävään lausekkeeseen lisätään ensin selventävät kertomerkit ja sitten lausekkeen arvo lasketaan sovitussa järjestyksessä alleviivaten aina seuraavaksi laskettava osalauseke:

$$
\begin{aligned}
&2^3-6/(7-2(1+1))+3\sqrt{4}=2^3-6/(7-2\cdot\underline{(1+1)})+3\cdot\sqrt{4}\\
&=2^3-6/(7-\underline{2\cdot 2})+3\cdot\sqrt{4}=2^3-6/\underline{(7-4)}+3\cdot\sqrt{4}\\
&=\underline{2^3}-6/3+3\cdot\sqrt{4}=8-6/3+3\underline{\sqrt{4}}=8-\underline{6/3}+3\cdot 2\\
&=8-2+\underline{3\cdot 2}=\underline{8-2}+6=\underline{6+6}=12
\end{aligned}
$$

Esimerkin laskuja voi nopeuttaa sieventämällä samanaikaisesti kaikkia kolmea termiä, jotka lopuksi lasketaan yhteen merkkeineen:

$$\underline{2^3}-6/\underline{(7-4)}+3\underline{\sqrt{4}}=8-\underline{6/3}+3\cdot 2=\underline{8-2+6}=12.$$

Esimerkki. Koska kerto- ja jakolaskut ovat samanarvoisia, niin ne on suoritettava seuraavassa lausekkeessa vasemmalta oikealle

$$\underline{2\cdot 6}:3\cdot 2:4=\underline{12:3}\cdot 2:4=\underline{4\cdot 2}:4=\underline{8:4}=2\ .$$

(Huomaa, että aikaisemmin on ollut voimassa sopimus, jonka mukaan kertolaskut suoritettiin ennen jakolaskuja. Tämä sopimus ei kuitenkaan ole enää voimassa. Yo lauseke sievennettiin aikoinaan seuraavasti: $\underline{2\cdot 6}:3\cdot 2:4=12:\underline{3\cdot 2}:4=\underline{12:6}:4=\underline{2:4}=0.5$, missä alleviivaamalla on jälleen osoitettu seuraavaksi suoritettava operaatio.)

Huomautus. Koska laskujen suoritusjärjestys vaikuttaa lopputulokseen, niin **laskut on ehdottomasti suoritettava oikeassa järjestyksessä tai sitten meidän on osattava käyttää sopivia, oikeaksi todistettuja laskulakeja**, joiden avulla päästään usein nopeammin lopputulokseen kuin suorittamalla orjallisesti kaikki lausekkeeseen merkityt laskutoimitukset sovitussa järjestyksessä.

Esimerkki. Laske tulon $98\cdot 76\cdot 54\cdot 32\cdot 10\cdot 0$ arvo. On aika työ käsin laskien kertoa ensimmäiset viisi tekijää keskenään. Voimme käyttää kuitenkin myöhemmin esitettävää tulosta nimeltään

> **Tulon nollasääntö.** Tulon arvo on nolla silloin ja vain silloin, kun ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.

Koska tulon viimeinen tekijä on nolla, niin voimme tuloa muuten laskematta heti todeta, että tarkasteltavan tulon arvo on nolla.

Toisaalta **tulon vaihdantalain** mukaan tulon tekijöiden järjestyksen saa vaihtaa, joten voimme myös aloittaa kertolaskut nollalla, jolloin kaikki kertolaskut muuttuvat todella helpoiksi ja lopputulos on heti selvä.

Huomautus. Vaikka sulkeita ei käytettäisikään, niin tiettyihin merkintöihin liittyvät lausekkeet on laskettava ennen merkinnän mukaista operaatiota:

1. Juurimerkin vaakasuoran viivan alla oleva lauseke lasketaan ennen juurenottoa.
2. Vaakasuoran jakoviivan ylä- ja alapuolella olevat lausekkeet on laskettava ennen jakolaskun suorittamista.
3. Potenssimerkinnässä koko ylänurkassa olevan eksponenttilausekkeen arvo on laskettava ennen potenssiin korotusta ja kantaluku on korotettava näin saatuun eksponenttiin.

Oikeiksi todistettujen laskusääntöjen avulla voidaan kuitenkin

1´. sopivien tulolausekkeiden neliö- ja/tai kuutiojuuri laskea ilman juurrettavan tarkempaa laskemista

2´. sopivien tulolausekkeiden osamäärää supistaa ennen jaettavan ja jakajan tarkempaa laskemista.

Esimerkki. $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

$\sqrt{3^2+4^2}$ ei suinkaan ole $\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}=3+4=7.$

$\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5.$

$\sqrt{13^2-12^2}$ ei suinkaan ole $\sqrt{13^2}-\sqrt{12^2}=13-12=1.$

$\sqrt{0.5^2\cdot 200^2}=\sqrt{0.25\cdot 40000}=\sqrt{10000}=100.$

Laskulain $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ mukaan saadaan helpomminkin

$\sqrt{0.5^2\cdot 200^2}=\sqrt{0.5^2}\cdot\sqrt{200^2}=0.5\cdot 200=100.$

Esimerkki. $\dfrac{4000+200}{500+100}=\dfrac{4200}{600}=\dfrac{42}{6}=7,$ missä laskut on laskettu oikeassa järjestyksessä.

$\dfrac{4000+200}{500\ +100}$ ei suinkaan ole $\dfrac{4000}{500}+\dfrac{200}{100}=8+2=10.$

Virheellisesti "termejä supistamalla" saatava lauseke

$\dfrac{\overset{8}{\cancel{4000}}+\overset{2}{\cancel{200}}}{\underset{1}{\cancel{500}}+\underset{1}{\cancel{100}}}$ antaa **väärän tuloksen** 5.

Oikein olisi erottaa sekä osoittajasta että nimittäjästä **yhteinen tekijä 100, jonka voi supistaa pois**:

$\dfrac{4000+200}{500+100}=\dfrac{\cancel{100}\cdot(40+2)}{\cancel{100}\cdot(5+1)}=\dfrac{42}{6}=7.$

Esimerkki. $10^{3\cdot 4-5} = 10^{(3\cdot 4-5)} = 10^{(12-5)} = 10^7 = 10000000$. Huomaa, että moniin tietoteknisiin apuvälineisiin syöte on kirjoitettava yhdelle riville, jolloin edellisessä lausekkeessa on käytettävä sulkeita seuraavasti $10 \wedge (3\cdot 4-5)$. Jos lausekkeen kirjoittaa ilman sulkeita muodossa $10 \wedge 3\cdot 4-5$, niin sen arvoksi saadaan normaalein laskujärjestyssäännöin $\underline{10 \wedge 3}\cdot 4-5 = \underline{1000\cdot 4}-5 = \underline{4000-5} = 3995$.

Huomautus. "Pitkän viivan" sisältäviä lausekkeita laskimeen kirjoitettaessa on oltava erityisen huolellinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki. Koska $\frac{8+4}{1+3} = \frac{12}{4} = 3$, niin ensimmäinen lauseke on kirjoitettava laskimeen sulkeita käyttäen muodossa $(8+4)/(1+3)$. Jos sulkeita ei kirjoiteta, niin lausekkeen arvo on $8+4/1+3 = 8+4+3 = 15$.
Vastaavasti laskettaessa laskimella lauseke $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ on juurrettava kirjoitettava sulkeisiin $\surd(9+16)$. Jos näet sulkeita ei kirjoiteta, niin juurenotto vaikuttaa vain lukuun 9 luvun 16 jäädessä juuren ulkopuolelle: $\surd 9+16 = 3+16 = 19$.

Mikäli laskimesi näyttää lausekkeet oikeassa muodossa, niin aina esimerkin kirjoittamisen jälkeen sinun kannattaa huolellisesti tarkistaa, miten laskimesi on tulkinnut syöttämäsi lausekkeen.

Esimerkki. Mikäli laskin näyttää lausekkeen oikeassa muodossa, niin edellisen esimerkin lausekkeet näkyvät muodoissa $\frac{8+4}{1+3}$, $8+\frac{4}{1}+3$, $\sqrt{(9+16)}$ ja $\sqrt{9}+16$, jolloin on helppo nähdä, tuliko lauseke kirjoitettua oikein.

Huomautus. Käsinkirjoitetussa ja painetussakin tekstissä käytetään laskujärjestyksen osoittamiseen joskus kolmenlaisia sulkeita: kaarisulkeita ( ), hakasulkeita [ ] ja aaltosulkeita { } . Tämä tietenkin auttaa sisäkkäisiä sulkeita sisältävän lausekkeen hahmottamista.

On kuitenkin huomattava, että **yleensä tietoteknisissä apuvälineissä voidaan laskujärjestyksen osoittamiseen käyttää vain kaarisulkeita**, sillä esimerkiksi hakasulut ovat monasti vektorin ja matriisin tunnuksena.

5. VAROTTAVIA MERKINTÖJÄ

Perinteellisesti merkinnässä a^{b^c} lasketaan ensin koko ylänurkassa oleva eksponenttilauseke b^c, jolloin esimerkiksi

$$2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{81} \approx 2.42 \cdot 10^{24} \ .$$

Mikäli kirjoitat saman lausekkeen laskimeen ilman sulkeita $2\ \hat{}\ 3\ \hat{}\ 4$, niin jotkin laskimet noudattavat perinteellistä laskujärjestystä, kun taas toiset laskimet ja taulukkolaskentaohjelma Excel suorittavat samanarvoiset laskutoimitukset vasemmalta oikealle yleisen sopimuksen mukaan, jolloin saadaan

$$2^{3^4} = (2^3)^4 = 8^4 = 4096.$$

Koska matematiikan oppikirjoissa ja joissakin tietoteknisissä apuvälineissä muotoa a^{b^c} olevat lausekkeet tulkitaan eri tavoin, niin kyseisessä lausekkeessa olisi syytä käyttää aina sulkeita sen mukaan, kumpaa lauseketta $(a^b)^c$ vai $a^{(b^c)}$ on tarkoitus tarkastella. Sulkeita käytettäessä kaikki apuvälineet laskevat lausekkeen niin kuin on merkittykin.

Ilman sulkeita olevaa etumerkillistä potenssimerkintää $-a^n$ kannattaa välttää, sillä tämänkin apuvälineet tulkitsevat eri tavoin.

Yksinkertaisena esimerkkinä tarkastelemme lauseketta -1^2.

- Matematiikan järjestyssääntöjen mukaan potenssiin korotus $1^2 = 1$ suoritetaan ennen etumerkin huomioimista, jolloin lausekkeen arvoksi saadaan -1.
- Ainakin tämän kertausoppaan kirjoittajien käytössä olevat laskimet antavat etumerkkimiinuksen avulla kirjoitetun lausekkeen $-1\hat{}2$ arvoksi -1, kuten matematiikassa perinteellisesti pitäisikin.
- Kokeilepa, mitä sinun laskimesi antaa vastaukseksi! Huomaa, että monissa laskimissa on kaksi eri miinusmerkkiä ja nyt tarkasteltavassa lausekkeessa pitää käyttää ”etumerkkimiinusta”. Jos käytät lausekkeen kirjoittamisessa ”vähennyslaskumiinusta”, niin silloin ainakin osa laskimista vähentää edellisen laskun lopputuloksesta luvun 1^2 eli, jos edellisestä laskusta olet saanut vastaukseksi vaikka luvun 20, niin laskin tulostaisikin vastaukseksi uuteen syötteeseesi luvun 19.
- Taulukkolaskentaohjelma Excel tulostaa kaavan $=-1\hat{}2$ arvoksi luvun 1 eli Excel suorittaa ensin ykkösen merkinmuutoksen ja korottaa sitten negatiivisen luvun neliöön saaden positiivisen lopputuloksen. Excel tulkitsee siis kaavan $=-1\hat{}2$ toisin kuin matematiikassa perinteellisesti tehdään ja ainakin useimmat laskimetkin tekevät.

Virheiden välttämiseksi lauseke $-a^n$ kannattaa siis aina kirjoittaa sulkeita käyttäen joko $(-a)\hat{}\,n$ tai $-(a\,\hat{}\,n)$ sen mukaan, missä järjestyksessä laskut on laskettava.

6. LASKULAKEJA

Peruslaskutoimituksia $+, -, \times$, / ja ^ sisältävien lausekkeiden sieventämisessä voi hyödyntää seuraavassa tarkasteltavia laskulakeja.

Yhteenlaskun vaihdantalaki. Summan arvo on riippumaton termien järjestyksestä.

Esimerkki. Yhteenlaskun vaihdantalain perusteella summamuotoinen symboleja sisältävä lauseke kirjoitetaan usein ”kauniimpaan” tai vakiintuneempaan järjestykseen, joka voi perustua esimerkiksi symbolien aakkosjärjestykseen tai polynomissa termien astelukuun. Esimerkiksi

$$b+a=a+b,$$

$$b-f-a+d+c=-a+b+c+d-f,$$

$$5x^2-3+x^4-2x^3=\begin{cases} x^4-2x^3+5x^2-3 \\ -3+5x^2-2x^3+x^4 \end{cases}\text{ tilanteesta riippuen.}$$

Esimerkki. Yhteenlaskun vaihdantalakia voi käyttää apuna numeerisen lausekkeen arvon laskemiseen päässä. Seuraavassa laskussa on käytetty hyväksi vain yhteenlaskun vaihdantalakia, minkä jälkeen on suoritettu aina yksi laskutoimenpide kerrallaan, jolloin laskusuoritukset näyttävät kovin pitkiltä vaikkakin ovat helpot.

$$\begin{aligned} &-196-244+765+245-766+198 \\ &= -196+198-244+245+765-766 \\ &= 2-244+245+765-766 \\ &= -242+245+765-766 = 3+765-766 = 768-766 = 2. \end{aligned}$$

Tässä esimerkissä kannattaisi käyttää myös yhteenlaskun liitäntälakia, kuten kohta näemme.

Kertolaskun vaihdantalaki. Tulon arvo on riippumaton tekijöiden järjestyksestä.

Esimerkki. Kertolaskun vaihdantalain perusteella tulomuotoinen lauseke kirjoitetaan usein ”kauniimpaan” tai vakiintuneempaan järjestykseen, esimerkiksi

$$b\cdot a=a\cdot b,$$

$$y\cdot 5\cdot x\cdot \pi\cdot a\cdot \sqrt{2}=5\cdot \pi\cdot \sqrt{2}\cdot a\cdot x\cdot y \text{ (kirjallisuudessa tavallisesti } 5\pi\sqrt{2}axy\text{)}.$$

Tulolausekkeessa on yleensä

- ensin numerokertoimet järjestyksessä kokonaisluvut, π, juuret
- sitten kirjainsymbolit järjestyksessä vakiotekijät *a, b, c, …* , muuttujat *t, x, y, z.*

Tekijöiden järjestys on matemaattisesti merkityksetön, mutta esimerkiksi opinnäytetyötä tai muuta julkaisua tehdessä kannattaa mallia katsoa erityisesti oman alan kirjallisuudesta, jolloin julkaisu vaikuttaa huolitellulta.

Yhteenlaskun liitäntälaki. Summalausekkeen arvo ei muutu, vaikka sen termit ryhmiteltäisiin suluilla miten tahansa.

Esimerkki. $a+b+c=(a+b)+c$ | Tämä on voimassa laskujärjestyssääntöjen mukaan

$=a+(b+c)$ | Yhteenlaskun liitäntälain mukaan

Esimerkki. $a+b+c+d$

$=((a+b)+c)+d$ | Laskujärjestyssääntöjen mukaan

$$=\begin{cases}(a+b)+(c+d)\\ a+(b+(c+d))\\ a+(b+c)+d\\ a+((b+c)+d)\end{cases}$$

| Yhteenlaskun liitäntälain mukaan saatavia muita yhtäpitäviä muotoja

Esimerkki. Seuraavassa lasketaan aikaisempi esimerkki uudelleen käyttäen ensin yhteenlaskun vaihdantalakia ja sitten vielä liitäntälakia:

$$-196-244+765+245-766+198=-196+198\overbrace{-244+245}^{(*)}+765-766$$
$$=(-196+198)\underbrace{+(-244+245)}_{(**)}+(765-766)=2+1-1=2\,.$$

Huomaa, että summalausekkeen kohdassa $(*)$ on termit -244 ja 245. Koska miinusmerkki on vain edellisen termin etumerkki, niin sitä ei saa ottaa myös jälkimmäisen termin etumerkiksi kuten virheellisesti meneteltäisiin, jos termit kohdassa $(**)$ ryhmiteltäisiin suluin muotoon $-(244+245)$.

Kertolaskun liitäntälaki. Tulolausekkeen arvo ei muutu, vaikka sen tekijät ryhmiteltäisiin suluilla miten tahansa.

Esimerkki. $a\cdot b\cdot c\cdot d$

$=((a\cdot b)\cdot c)\cdot d$ | Laskujärjestyssääntöjen mukaan

$$=\begin{cases}(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)\\ a\cdot(b\cdot(c\cdot d))\\ a\cdot(b\cdot c)\cdot d\\ a\cdot((b\cdot c)\cdot d)\end{cases}$$

| Kertolaskun liitäntälain mukaan saatavia muita yhtäpitäviä muotoja

Esimerkki. Tässä esimerkissä muokataan yhdelle riville kirjoitettu kerto- ja jakolaskutoimituksia sisältävä lauseke kahden tulon osamääräksi

$a\cdot b:c/d\cdot e:f$	Jakomerkit : ja / ovat täysin samanarvoiset ts. ne voi halutessaan vaihtaa toiseksi
$=a\cdot b\cdot\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{d}\cdot e\cdot\dfrac{1}{f}$	Luvulla jakaminen vastaa käänteisluvun kertomista
$=a\cdot b\cdot e\cdot\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{1}{f}$	Kertolaskun vaihdantalain mukaan tekijöiden järjestyksen saa vaihtaa
$=(a\cdot b\cdot e)\cdot\left(\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{1}{f}\right)$	Kertolaskun liitäntälain mukaan tekijät saadaan suluilla ryhmitellä vapaasti
$=(a\cdot b\cdot e)\cdot\left(\dfrac{1}{c\cdot d\cdot f}\right)$	Murtolausekkeet kerrotaan siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään
$=(a\cdot b\cdot e):(c\cdot d\cdot f)$	Käänteisluvun kertominen vastaa luvulla jakamista
$=\dfrac{a\cdot b\cdot e}{c\cdot d\cdot f}$	Jakomerkki : on korvattu vaakasuoralla jakoviivalla

Huomautus. Edellisen esimerkin mukaisesti jokainen yhdelle riville kerto- ja jakomerkkejä käyttäen kirjoitettu tulo voidaan ilmeisesti kirjoittaa yhtä vaakasuoraa jakoviivaa käyttäen murtolausekkeeksi, jonka nimittäjään tulevat tekijöiksi ne luvut ja kirjaimet, joita edeltää jakomerkki, ja osoittajaan tulevat kaikki muut tulon tekijät.

Esimerkki. $a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g=\dfrac{a\cdot d\cdot e\cdot g}{b\cdot c\cdot f}$

Esimerkki. Sievennetään seuraava poikkeuksellisen helposti supistuva lauseke kirjoittamalla se murtolausekkeeksi käyttäen vaakasuoraa jakoviivaa:

$$234:71:33\cdot 660\cdot 71^3:5:71^2:468=\frac{\cancel{234}\cdot\overset{20}{\cancel{660}}\cdot\cancel{71^3}}{\cancel{71}\cdot\cancel{33}\cdot 5\cdot\cancel{71^2}\cdot\underset{2}{\cancel{468}}}=\frac{20}{5\cdot 2}=2.$$

Osittelulaki. Kaksi summalauseketta kerrotaan keskenään siten, että ensimmäisen summalausekkeen jokaisella termillä kerrotaan jälkimmäisen summalausekkeen jokainen termi ja lopuksi saadut tulot lasketaan yhteen.

Esimerkki. Suoritetaan kertolasku osittelulain mukaisesti

$$(a+b)\cdot(x+y+z)=a\cdot x+a\cdot y+a\cdot z+b\cdot x+b\cdot y+b\cdot z.$$

Huomautus. Osittelulain soveltamisen jälkeen saatua summalauseketta voidaan tietenkin edelleen muokata laskulakeja käyttäen siten, että keskenään **samanmuotoiset termit** yhdistetään yhdeksi termiksi. Samanmuotoisilla termeillä tarkoitetaan sellaisia termejä, joiden (oleellisin) kirjainosa on sama, mutta numerokertoimet (tai muutoin vähempiarvoiset kertoimet) voivat olla erilaisetkin.

Esimerkki. Sievennetään lähtölausekkeet

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) \overset{\text{osittelulaki}}{=} a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$\overset{\substack{\text{kertolaskun}\\ \text{vaihdantalaki}}}{=} a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 \overset{\substack{\text{yhdistetään saman-}\\ \text{muotoiset termit}}}{=} a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) \overset{\text{osittelulaki}}{=} a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b)$$
$$\overset{\substack{\text{kertolaskun}\\ \text{vaihdantalaki}}}{=} a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 \overset{\substack{\text{yhdistetään saman-}\\ \text{muotoiset termit}}}{=} a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) \overset{\text{osittelulaki}}{=} a\cdot a + \cancel{a\cdot(-b)} + \cancel{b\cdot a} + b\cdot(-b) = a^2 - b^2$$

Edellisessä esimerkissä johdettiin kolme tulosta, jotka on osattava ulkoakin, koska niitä käytetään myöhemmin myös takaperin:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Edelliset säännöt kannattaa opetella myös sanallisesti:

Kahden luvun summan neliö on lukujen neliöiden summa **lisättynä samojen lukujen kaksinkertaisella tulolla.**

Kahden luvun erotuksen neliö on lukujen neliöiden summa **vähennettynä samojen lukujen kaksinkertaisella tulolla.**

Kahden luvun summan ja erotuksen tulo on samojen lukujen neliöiden erotus.

Huomautus. Erityisesti kannattaa huomata, että $(a+b)^2$ **ei ole** a^2+b^2.

Esimerkki. Sievennetään aukikertomalla **muuttujan *x*** polynomia

$$P(x) = (x^2 + a\cdot x + b)\cdot(x+c) = x^2\cdot x + x^2\cdot c + a\cdot x\cdot x + a\cdot x\cdot c + b\cdot x + b\cdot c$$
$$= x^3 + \underline{c\cdot x^2} + \underline{a\cdot x^2} + \underline{\underline{a\cdot c\cdot x}} + \underline{\underline{b\cdot x}} + b\cdot c = x^3 + (a+c)\cdot x^2 + (a\cdot c + b)\cdot x + b\cdot c\,.$$

Samanlaisella alleviivauksella merkityt muuttujan x samanasteiset termit ovat samanmuotoisia, vaikka niiden (vähemmän tärkeät) kirjainosat eroavatkin, ja niinpä muuttujan x samanasteiset termit on yhdistetty käyttäen osittelulakia takaperin.

Esimerkki. Sievennetään **kahden muuttujan *x* ja *y*** polynomia

$$Q(x,y)=(x-4y)^2-2\cdot(x-4)^2-3\cdot(3y+1)^2 \qquad \Big| \text{ Käytä kaavoja } (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$=\left(x^2-2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2\right)-2\cdot\left(x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2\right)-3\cdot\left((3y)^2+2\cdot 3y\cdot 1+1^2\right)$$

| Muista, että kertoimet -2 ja -3 vaikuttavat jokaiseen sulkeitten sisällä olevaan termiin

$$=\underline{\underline{x^2}}-8xy+\underline{16y^2}\ \underline{\underline{-2x^2}}+16x-32\underline{-27y^2}-18y-3 \qquad \Big| \text{ Yhdistä samanmuotoiset termit}$$

$$=-x^2-11y^2-8xy+16x-18y-35$$

Edellisestä esimerkistä poiketen termejä $-8xy$ ja $16x$ ei ole tapana yhdistää muotoon $(-8y+16)\cdot x$, vaikka se ei olisikaan väärin. Muuttujien *x* ja *y* toisen asteen polynomi esitetään nimittäin tavallisesti muodossa $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F$, jossa kertoimet *A, B, C, D, E* ja *F* ovat lukuja tai lukuja esittäviä symboleja.

Huomautus. Lausekkeiden sieventämiseen liittyy monia ”sanomattomia sopimuksia”, joista rutinoitunut laskija pitää kiinni, mutta joista poikkeaminen on kuitenkin korkeintaan ”kauneusvirhe”.

Sieventämisessä kaikkein tärkeintä on aina matemaattisten **virheiden ehdoton välttäminen** ja sellaisen muodon saaminen, jota esimerkissä selvästi kysyttiin tai josta tehtävän suoritusta voidaan tarvittaessa jatkaa eteenpäin.

7. KOKONAISPOTENSSI

Potenssimerkinnässä a^n perusrivillä on **kantaluku** *a* ja ylänurkassa **eksponentti** *n.* Seuraavassa kerrataan lyhyesti **kokonaispotenssin** määritelmä ja laskulait.

Määritelmä. Olkoon a mielivaltainen reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Määritellään luvun *a n.* potenssi

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ kpl}}\ .$$

Jos lisäksi $a\neq 0$, niin määritellään edelleen

$$\boxed{\begin{aligned} a^0&=1\\ a^{-n}&=\frac{1}{a^n}\end{aligned}}$$

Esimerkki. $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$, $5^0=1$, $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$,

$$-2^4 \overset{\substack{\text{Siirrytään selvempään}\\ \text{merkitsemistapaan}}}{=} -(2^4)=-16 \qquad \Big| \text{ Muista, että Excelissä } -2^4=(-2)^4=16\ .$$

Huomautus. Lausekkeita 0^0 ja 0^{-n} ei määritellä, kun eksponentti $-n$ on negatiivinen kokonaisluku.

Edellä määritellylle kokonaispotenssille on voimassa laskulait:

Lause. Olkoot a ja b mielivaltaisia reaalilukuja (tarvittaessa $\neq 0$) sekä m ja n kokonaislukuja. Silloin

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Samankantaiset potenssit kerrotaan keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen.
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten, että eksponentit vähennetään.
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Tulo korotetaan potenssiin siten, että kukin tekijä erikseen korotetaan potenssiin.
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Osamäärä korotetaan potenssiin siten, että osoittaja ja nimittäjä erikseen korotetaan potenssiin.
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	Potenssin potenssi lasketaan kertomalla eksponentit keskenään.

Esimerkki. Todetaan edellisen lauseen kohdat oikeiksi siinä erikoistapauksessa, missä $m=5$ ja $n=3$.

$$a^m \cdot a^n = a^5 \cdot a^3 = (a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) \overset{\substack{\text{kertolaskun liitäntä-}\\\text{laki takaperin}}}{=} a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^8 = a^{5+3} = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot \cancel{a\cdot a\cdot a}}{\cancel{a\cdot a\cdot a}} = a\cdot a = a^2 = a^{5-3} = a^{m-n},$$

$$(a\cdot b)^n = (a\cdot b)^3 = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b) \overset{\substack{\text{kertolaskun liitäntä-}\\\text{laki takaperin}}}{=} a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b$$

$$\overset{\substack{\text{kertolaskun}\\\text{vaidantalaki}}}{=} a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b \overset{\substack{\text{kertolaskun}\\\text{liitäntälaki}}}{=} (a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b) = a^3\cdot b^3 = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} \overset{\substack{\text{Murtolausekkeiden}\\\text{kertolasku}}}{=} \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a^n}{b^n},$$

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^5\right)^3 = (a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)^3 = (a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)$$

$$\overset{\substack{\text{Kertolaskun liitäntä-}\\\text{laki takaperin}}}{=} a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^{15} = a^{5\cdot 3} = a^{m\cdot n}.$$

Tarkastellaan vielä lauseketta $\dfrac{a^m}{a^n}$, kun $m = 2 < 5 = n$. Tällöin

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^2}{a^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{a\cdot a}}}{a\cdot a\cdot a\cdot \cancel{a\cdot a}} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{2-5} = a^{m-n}.$$

Huomautus. Edellisen lauseen tulokset ovat voimassa vain tulo- ja osamäärälausekkeille. Vastaavia tuloksia ei voi käyttää summa- ja erotuslausekkeiden käsittelyyn.

Esimerkki.

$a^4 + a^2$ ei voida sieventää muuten kuin yhteisen tekijän erottamisella $a^2 \cdot (a^2 + 1)$.

$a^4 + a^4 = 2 \cdot a^4$.

$7 \cdot a^3 + 2 \cdot a^3 = (7+2) \cdot a^3 = 9 \cdot a^3$.

$a^5 - a^3$ ei voida sieventää muuten kuin yhteisen tekijän erottamisella $a^3 \cdot (a^2 - 1)$.

$a^5 - a^5 = 0$.

$7 \cdot a^3 - 2 \cdot a^3 = (7-2) \cdot a^3 = 5 \cdot a^3$.

$(a+b)^3$ **ei ole** $a^3 + b^3$, vaan

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b)\cdot(a+b)\cdot = \\ &= a\cdot a\cdot a + \underline{a\cdot a\cdot b} + \underline{a\cdot b\cdot a} + \underline{\underline{a\cdot b\cdot b}} + \underline{b\cdot a\cdot a} + \underline{\underline{b\cdot a\cdot b}} + \underline{\underline{b\cdot b\cdot a}} + b\cdot b\cdot b \\ &= a^3 + 3\cdot a^2 \cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3 .\end{aligned}$$

Sovelletaan edellistä tulosta, kun $a = 10$ ja $b = 1$:

$11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3\cdot 10^2 \cdot 1 + 3\cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331.$

8. SUURILLA JA PIENILLÄ LUVUILLA LASKEMISESTA

Esimerkki. Suorita laskimella kertolasku $98.765 \cdot 10^{43} \cdot 87.654 \cdot 10^{32}$ viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Moniin laskimiin syötteen voi kirjoittaa yhdelle riville muodossa

$$98.765 \cdot 10\,\hat{}\,43 \cdot 87.654 \cdot 10\,\hat{}\,32 .$$

Tulkitse laskimesi vastaus ennen kuin luet esimerkkiä eteenpäin.

Todennäköisesti laskimesi kirjoittaa vastaukseksi 8.65714731E78, mikä tarkoittaa lukua $8.65714731 \cdot 10^{78}$. Halutulla tarkkuudella vastaus on siis $8.6571 \cdot 10^{78}$.

Merkinnällä xEn laskin tarkoittaa siis lauseketta $x \cdot 10^n$.

Mikäli laskimesi ei pysty suorittamaan esimerkin kertolaskua, niin voit muokata laskettavaa tuloa vaihdanta- ja liitäntälakeja käyttäen seuraavasti

$$\begin{aligned}98.765 \cdot 10^{43} \cdot 87.654 \cdot 10^{32} &= \underbrace{98.765 \cdot 87.654}_{\text{laskimella}} \cdot 10^{43} \cdot 10^{32} = 8657.1 \cdot 10^{43+32} \\ &= 8657.1 \cdot 10^{75} = 8.6571 \cdot 10^{78} .\end{aligned}$$

Huomautus. Edellisen esimerkin voit kirjoittaa useimpiin laskimiin syötteellä

$$98.765\boxed{\text{EE}}43\cdot 87.654\boxed{\text{EE}}32\ ,$$

missä on painettava laskimen EE-näppäintä merkinnän $\boxed{\text{EE}}$ kohdalla. Huomaa, että esimerkiksi $5\boxed{\text{EE}}67$ on laskimissa luvun esitysmuoto ja se vastaa sulkeissa olevaa tulo- ja potenssilauseketta $(5\cdot 10\,\hat{}\,67)$ seuraavan esimerkin mukaisesti.

Esimerkki.

Lauseke	Syöte kympin potensseilla	Syöte xEn-merkinnällä	Vastaus
$\dfrac{2\cdot 10^{34}}{5\cdot 10^{67}}$	$2\cdot 10\text{^}34/(5\cdot 10\text{^}67)$	$2\boxed{\text{EE}}34/5\boxed{\text{EE}}67$	$4\text{E}-34 = 4\cdot 10^{-34}$

Huomaa, että ilman sulkeita oleva syöte $2\cdot 10\text{^}34/5\cdot 10^{67}$ tarkoittaa lauseketta $\dfrac{2\cdot 10^{34}}{5}\cdot 10^{67} = 4\cdot 10^{100}$.

Esimerkki. Yhteenlasku $3\cdot 10^{3456} + 2\cdot 10^{2345}$ ylittää laskimen kapasiteetin ja laskin voi ilmoittaa tulokseksi ”äärettömän suuren”, ”äärettömyyden” ∞, mikä ei kuitenkaan pidä paikkaansa. Miten lasku kannattaisi laskea käsin ilman laskinta?

Hankalat yhteenlaskut suoritettiin peruskoulussa allekkain, tosin yleensä pienemmillä luvuilla kuin esimerkissämme. Näinhän se tapahtui:

$$\begin{array}{rr}
 & 3\overbrace{000...000\,000...000}^{\text{3456 nollaa}} \\
+ & 2\underbrace{000...000}_{\text{2345 nollaa}} \\
\hline
 & 3\underbrace{000...002\,000...000}_{\substack{\text{3456 numeroa, joista 1110}\\ \text{ensimmäistä on nollia, sitten on}\\ \text{kakkonen ja 2345 nollaa}}} \approx 3\cdot 10^{3456}\ .
\end{array}$$

Termeistä näet jo päälle, että vaikka jälkimmäinenkin termi on hyvin suuri, niin se on kuitenkin ”mitättömän pieni” ensimmäiseen termiin verrattuna, jolloin summan arvo riippuu käytännössä vain ensimmäisestä termistä.

Esimerkki. Suoritetaan vähennyslasku $9.8765\cdot 10^{-1234} - 1.2345\cdot 10^{-1236}$ allekkain

$$\begin{array}{rl}
 & 0.\overbrace{000...000}^{\text{1233 nollaa}}98765\mathbf{00} \\
- & 0.\underbrace{000...0000\,0}_{\text{1235 nollaa}}12345 \\
\hline
 & 0.000...00098\,64\mathbf{155} \approx 9.8642\cdot 10^{-1234}
\end{array}$$

Lihavoidut desimaalit ovat epätarkkoja ja siksi ne on syytä pyöristäen katkaista pois.

Voit ottaa myös kympin sopivan potenssin tekijäksi

$$9.8765\cdot 10^{-1234} - 1.2345\cdot 10^{-1236} = (9.8765 - 1.2345\cdot 10^{-2})\cdot 10^{-1234}$$

$$= (9.8765 - 0.012345)\cdot 10^{-1234} = 9.864155\cdot 10^{-1234} \approx 9.8642\cdot 10^{-1234}\ .$$

9. YKSIKÖNMUUNNOKSISTA

Fysiikan yksiköiden tärkeimpiä kerrannaisyksiköitä esittävät etuliitteet sekä niiden lyhenteet ja arvot selviävät seuraavasta taulukosta.

Taulukossa on esitetty myös tutut etuliitteet sentti (c) ja desi (d), vaikka niiden käyttö ei ole suositeltavaa.

Etuliite	Lyhenne	Arvo
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
desi	d	0.1
sentti	c	0.01
milli	m	10^{-3}
mikro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}

Esimerkki. $5\ \text{Mm} = 5 \cdot 10^6\ \text{m} = 5\ 000\ 000\ \text{m}$, $2\ \mu\text{s} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 0.000\ 002\ \text{s}$.

Huomautus. Yksikön etuliite (esimerkiksi kilo, k**) liittyy kiinteästi yksikköön (esimerkiksi metri,** m**) siten, että merkinnässä** km^2 **etuliitteen ja yksikön välinen kertolasku on matematiikan normaalisäännöistä poiketen suoritettava ennen potenssiin korotusta ts.**

$$\text{km}^2 = (\text{km})^2 = (1000\ \text{m})^2 = 1000^2\ \text{m}^2 = 10^6\ \text{m}^2 .$$

Etuliitteellä kertominen poikkeaa siis tavallisilla luvuilla ja muuttujilla tapahtuvasta kertomisesta. Normaalien laskujärjestyssääntöjen mukaisesti matematiikan merkinnässä ab^2 potenssiin korotus suoritetaan ennen kertolaskua, jolloin

$$ab^2 = a^1 \cdot b^2 \ .$$

Korostaaksemme matematiikan tavallisen merkitsemistavan ja fysiikan kerrannaisyksikön etuliitteen eroa jatkossa esimerkiksi neliökilometri km^2 merkitään tässä kertausoppaassa yksikönmuunnoksia suoritettaessa ensin selvemmässä muodossa $(\text{km})^2$, johon vasta sitten sulkeiden sisään sijoitetaan etuliitteen arvo.

Esimerkki. $5\ \text{km}^2 = 5\ (\text{km})^2 = 5 \cdot (1000\ \text{m})^2 = 5 \cdot 1000^2\ \text{m}^2 = 5 \cdot 10^6\ \text{m}^2$

$2\ \text{mm}^3 = 2\ (\text{mm})^3 = 2 \cdot (10^{-3}\ \text{m})^3 = 2 \cdot (10^{-3})^3\ \text{m}^3 = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3$

Huomautus. Kiinnitä huomiota edellisessä esimerkissä esiintyneiden yksiköiden lukutapaan:

Lyhenne km^2 luetaan neliökilometrinä, joka viittaa neliöön, jonka sivu on kilometri ja ala siis $(1\ \mathrm{km})^2 = (1000\ \mathrm{m})^2 = 10^6\ \mathrm{m}^2$. Lukutavan alkuosa ”neliö” korostaa sitä, että koko loppuosa ”kilometri” korotetaan neliöön. Lyhennettä km^2 ei saa lukea kiloneliömetrinä, joka tarkoittaisi tuhatta neliömetriä. Tämän väärän lukutavan keskiosa ”neliö” viittaa siihen, että vain sanan loppuosa ”metri” korotetaan neliöön, jonka jälkeen kerrotaan vielä kilolla (eli tuhannella).

Vastaavasti lyhenne mm^3 luetaan kuutiomillimetrinä, joka viittaa kuutioon, jonka särmä on millimetri ja tilavuus siis $(1\ \mathrm{mm})^3 = (10^{-3}\ \mathrm{m})^3 = 10^{-9}\ \mathrm{m}^3$. Lyhennettä ei saa lukea millikuutiometrinä, joka tarkoittaisi tuhannesosaa kuutiometristä.

Huomautus. Taulukon etuliitteiden arvoja ja ensimmäistä huomautusta käyttäen yksikönmuunnokset voi palauttaa aivan tavallisiksi sievennystehtäviksi.

Esimerkki. Lausu perusyksiköiden avulla a) $\dfrac{8\,\mathrm{Mm}^3}{4\ \mu\mathrm{m}^2}$ b) $\dfrac{6\mathrm{mm}^4}{2\mathrm{km}^2}$.

a) $$\frac{8\ \mathrm{Mm}^3}{4\ \mu\mathrm{m}^2} = \frac{8\cdot(\mathrm{Mm})^3}{4\cdot(\mu\mathrm{m})^2} = \frac{8\cdot(10^6\mathrm{m})^3}{4\cdot(10^{-6}\mathrm{m})^2} = \frac{8\cdot10^{6\cdot3}\mathrm{m}^3}{4\cdot10^{-6\cdot2}\mathrm{m}^2} = \frac{8\cdot10^{18}\mathrm{m}^3}{4\cdot10^{-12}\mathrm{m}^2} = 2\cdot10^{18-(-12)}\mathrm{m}$$
$$= 2\cdot10^{30}\mathrm{m}$$

b) $$\frac{6\mathrm{mm}^4}{2\mathrm{km}^2} = \frac{6\cdot(\mathrm{mm})^4}{2\cdot(\mathrm{km})^2} = \frac{6\cdot(10^{-3}\ \mathrm{m})^4}{2\cdot(10^3\ \mathrm{m})^2} = \frac{6\cdot10^{-12}}{2\cdot10^6}\frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{m}^2} = \frac{6}{2}\cdot10^{-12-6}\ \mathrm{m}^2 = 3\cdot10^{-18}\ \mathrm{m}^2$$

Esimerkki. Muunnetaan auton polttoaineen kulutus $\dfrac{7\ \mathrm{ltr}}{100\ \mathrm{km}}$ yksiköihin mm^2.

Muunnos tapahtuu korvaamalla osoittajassa litra ensin kuutiodesimetrillä ja sitten desimetri sadalla millimetrillä. Nimittäjässä kilometri lausutaan ensin metreinä ja metrit lopuksi millimetreinä.

$$\frac{7\ \mathrm{ltr}}{100\ \mathrm{km}} = \frac{7\ \mathrm{dm}^3}{100\ \underbrace{\mathrm{km}}_{=1000\mathrm{m}}} = \frac{7\ (\mathrm{dm})^3}{100\cdot1000\ \underbrace{\mathrm{m}}_{=1000\mathrm{mm}}} = \frac{7\cdot(100\ \mathrm{mm})^3}{100\cdot1000\cdot1000\ \mathrm{mm}} = \underline{\underline{0.07\ \mathrm{mm}^2}}.$$

Vastaukseksi saatu pinta-ala kuvaa sen polttoainevanan poikkipinta-alaa, jonka auto ”tupruttaa” pakoputkesta matkan varrelle (tosin todellisuudessa enemmän tilaa vaativina, pääosin kaasumaisina päästöinä).

Huomautus. Erityisesti perinteellisiin yksiköihin liittyy muuntokertoimia, jotka eivät ole kympin potensseja: Esimerkiksi $1\ \mathrm{h} = 60\ \mathrm{min} = 60\cdot(60\ \mathrm{s}) = 3600\ \mathrm{s}$.

Esimerkki. Muunnetaan kiihtyvyys $5.00\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}$ yksiköihin $\dfrac{\text{mm}}{\text{s}^2}$.

$$5.00\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = 5\cdot\frac{1000\ \text{m}}{(3600\ \text{s})^2} = 5\cdot\frac{1000\cdot 1000\ \text{mm}}{(3600\ \text{s})^2} = \frac{5\cdot 10^6}{3600^2}\cdot\frac{\text{mm}}{\text{s}^2} = 0.386\ \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}\ .$$

Esimerkki. Muunnetaan nopeus 2.5 mm/s yksiköihin m/h lausumalla millimetrit metreinä ja sekunnit tunnin osina:

$$2.5\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} = 2.5\cdot\frac{10^{-3}\ \text{m}}{\frac{1\ \text{h}}{3600}} = 2.5\cdot 10^{-3}\cdot 3600\cdot\frac{\text{m}}{\text{h}} = 9.0\ \frac{\text{m}}{\text{h}}\ .$$

10. MURTOLAUSEKKEISTA

Murtoluku tarkoittaa kahden kokonaisluvun osamäärää, esimerkiksi $\dfrac{7}{2}$.

Murtolauseke tarkoittaa kahden lausekkeen osamäärää, esimerkiksi $\dfrac{a\cdot x}{b\cdot y}$, $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

(Pää)jakoviivan yläpuolella oleva lauseke on **jaettava eli osoittaja** ja alapuolella oleva lauseke on **jakaja eli nimittäjä**.
Jotta murtolauseke olisi määritelty, niin nimittäjän pitää olla erisuuri kuin nolla.

Lause. Murtolausekkeen arvo ei muutu, jos se supistetaan tai lavennetaan.

Murtolauseke **lavennetaan** siten, että osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla nollasta eroavalla luvulla tai lausekkeella:

$$^{4)}\frac{17}{25} = \frac{4\cdot 17}{4\cdot 25} = \frac{68}{100}\ ,\qquad ^{x\cdot y)}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{(x\cdot y)\cdot 1}{(x\cdot y)\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} = \frac{x\cdot y}{x\cdot y\cdot\frac{1}{x}+x\cdot y\cdot\frac{1}{y}} = \frac{x\cdot y}{y+x} = \frac{x\cdot y}{x+y}.$$

Murtolauseke **supistetaan** siten, että (koko) osoittaja ja (koko) nimittäjä jaetaan samalla luvulla tai lausekkeella:

$$\frac{26^{(2}}{12} = \frac{26/2}{12/2} = \frac{13}{6}\ ,\qquad \frac{a\cdot x + a\cdot y}{a\cdot b} = \frac{\cancel{a}\cdot(x+y)}{\cancel{a}\cdot b} = \frac{x+y}{b}\ .$$

Huomaa, että termiä (= summalausekkeen yhteenlaskettava) tai termin tekijää ei saa supistaa. Seuraavat "supistukset" ovat siis väärin:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{10}}+7}{\cancel{2}} \overset{\text{VÄÄRIN!!}}{=} 12,$$ väärin, sillä eihän koko osoittajaa ole jaettu kahdella,

$$\frac{\cancel{a}\cdot x+a\cdot y}{\cancel{a}\cdot b} \overset{\text{VÄÄRIN!!}}{=} \frac{x+a\cdot y}{b},$$ väärin, sillä eihän koko osoittajaa ole jaettu a:lla.

Lause. Murtolausekkeet, joissa on sama nimittäjä, lasketaan yhteen siten, että osoittajat lasketaan yhteen ja nimittäjä säilyy alkuperäisenä. Tarvittaessa murtolausekkeet lavennetaan ensin samannimisiksi:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}\ ,$$

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18} \overset{\substack{\text{Lavennetaan siten, että uusi nimittäjä}\\ \text{= alkuperäisten nimittäjien pienin}\\ \text{yhteinen jaettava = 36}}}{=} {}^{3)}\frac{5}{12}+{}^{2)}\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{15+14}{36}=\frac{29}{36}\ .$$

Vastaavasti vähennyslasku:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}={}^{d)}\frac{a}{b}-{}^{b)}\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\ .$$

Huomautus. Annettujen nimittäjien pienin yhteinen jaettava (p.y.j.) löydetään esittämällä ensin kukin nimittäjä alkutekijöiden tulona ja ottamalla sitten pienimpään yhteiseen jaettavaan kutakin alkutekijää niin monta kappaletta kuin niitä on siinä nimittäjässä, jossa niitä on eniten. Kukin kirjainmuuttuja ajatellaan omaksi alkutekijäksi.

Esimerkki. Etsi nimittäjien $16ab, 24a^2b, 60a^2$ ja $75c$ pienin yhteinen jaettava.

$$16ab=\boxed{2^4}\cdot a\cdot\boxed{b}$$
$$24a^2b=2^3\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{a^2}\cdot b$$
$$60a^2=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot a^2$$
$$75c=3\cdot\boxed{5^2}\cdot\boxed{c}$$

Jokaisesta esiintyneestä alkutekijästä on yksi korkeimmista potensseista selvyyden vuoksi kehystetty.

$$\text{p.y.j.}=\boxed{2^4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5^2}\cdot\boxed{a^2}\cdot\boxed{b}\cdot\boxed{c}=1200a^2bc$$

Huomautus. Alkutekijöiden löytymistä voi helpottaa seuraavilla muistisäännöillä:
Kokonaisluku on jaollinen luvulla
- 2, jos luvun viimeinen numero on parillinen,
- 3, jos luvun numeroiden summa on jaollinen kolmella,
- 5, jos luvun viimeinen numero on 0 tai 5.

Lause. Murtolauseke kerrotaan luvulla tai lausekkeella siten, että murtolausekkeen osoittaja kerrotaan kyseisellä luvulla tai lausekkeella:

$$2\cdot\frac{3}{11}=\frac{2\cdot 3}{11}=\frac{6}{11}\quad,\qquad a\cdot b\cdot\frac{b\cdot x}{a\cdot y}=\frac{\cancel{a}\cdot b\cdot b\cdot x}{\cancel{a}\cdot y}=\frac{b^2\cdot x}{y}\quad.$$

Lause. Murtolauseke jaetaan luvulla tai lausekkeella siten, että murtolausekkeen nimittäjä kerrotaan kyseisellä luvulla tai lausekkeella:

$$\frac{3}{11}:2\overset{\text{sama toisin merkittynä}}{=}\frac{\frac{3}{11}}{2}=\frac{3}{11\cdot 2}=\frac{3}{22}\quad,\qquad \frac{bx}{ay}:(ab)\overset{\text{sama toisin merkittynä}}{=}\frac{\frac{b\cdot x}{a\cdot y}}{a\cdot b}=\frac{\cancel{b}\cdot x}{a\cdot y\cdot a\cdot\cancel{b}}=\frac{x}{a^2\cdot y}\quad.$$

Lause. Murtolausekkeet kerrotaan keskenään siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}\quad,\qquad \frac{a\cdot x}{b\cdot y}\cdot\frac{b\cdot x}{a\cdot y}=\frac{\cancel{a}\cdot x\cdot\cancel{b}\cdot x}{\cancel{b}\cdot y\cdot\cancel{a}\cdot y}=\frac{x^2}{y^2}\quad.$$

Lause. Lauseke jaetaan murtolausekkeella siten, että jaettavana oleva lauseke kerrotaan jakajan käänteislausekkeella:

$$a:\frac{b}{c}\overset{\text{sama toisin merkittynä}}{=}\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{a\cdot c}{b}\quad,\qquad \frac{2}{3}:\frac{5}{7}\overset{\text{sama toisin merkittynä}}{=}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}\;,$$

$$\frac{a\cdot x}{b\cdot y}:\frac{b\cdot x}{a\cdot y}\overset{\text{sama toisin merkittynä}}{=}\frac{\frac{a\cdot x}{b\cdot y}}{\frac{b\cdot x}{a\cdot y}}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y}\cdot\frac{a\cdot y}{b\cdot x}=\frac{a\cdot\cancel{x}\cdot a\cdot\cancel{y}}{b\cdot\cancel{y}\cdot b\cdot\cancel{x}}=\frac{a^2}{b^2}\quad.$$

Huomautus. Murtolausekkeella jakamisen voi suorittaa myös laventamalla ”pikkunimittäjien” tulolla tai niiden pienimmällä yhteisellä jaettavalla:

$$^{c)}\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{c\cdot a}{\cancel{c}\cdot\frac{b}{\cancel{c}}}=\frac{a\cdot c}{b}\quad,\qquad ^{3\cdot 7)}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{\cancel{3}\cdot 7\cdot\frac{2}{\cancel{3}}}{3\cdot\cancel{7}\cdot\frac{5}{\cancel{7}}}=\frac{14}{15}\;,$$

$$^{(b\cdot y)\cdot(a\cdot y))}\frac{\frac{a\cdot x}{b\cdot y}}{\frac{b\cdot x}{a\cdot y}}=\frac{\cancel{(b\cdot y)}\cdot(a\cdot y)\cdot\frac{a\cdot x}{\cancel{b\cdot y}}}{(b\cdot y)\cdot\cancel{(a\cdot y)}\cdot\frac{b\cdot x}{\cancel{a\cdot y}}}=\frac{a^2\cdot\cancel{x\cdot y}}{b^2\cdot\cancel{x\cdot y}}=\frac{a^2}{b^2}\quad.$$

Riittäisi laventaa pikkunimittäjien p.y.j:llä $a\cdot b\cdot y$, jolloin ei tarvitsisi enää jatkossa supistaa y:llä.

11. POLYNOMILAUSEKKEILLA LASKEMISESTA

Muotoa $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ olevaa summaa, missä kertoimet a_i ovat kiinteitä lukuja ja x on muuttuja, sanotaan (yhden muuttujan x) **astetta *n* olevaksi polynomiksi.**

Esimerkki. $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$ on eräs toisen asteen polynomi ja $Q(x) = 3$ on eräs astetta nolla oleva polynomi, jota sanotaan myös **vakiopolynomiksi**, koska polynomin arvo on muuttujasta x riippumatta vakio 3. Sitä arvoa, jonka polynomi $P(x)$ saa kohdassa x_0 merkitään $P(x_0)$, niinpä $P(5) = 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 3 = 53$.

Huomautus. Nollapolynomi $O(x)$ tarkoittaa polynomia, joka saa kaikkialla vakioarvon nolla, $O(x) = 0$. Nollapolynomin astelukua ei määritellä.

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku suoritetaan poistamalla sulut ja yhdistämällä samaa astetta olevat vastintermit. **Sulkeiden edessä oleva miinusmerkki vaikuttaa tietenkin jokaisen sulkeiden sisällä olevan termin merkkiin.**

Esimerkki. $(2x^2 - 5) + (3x^2 - 2x + 4) - (2x + 1) = \underline{2x^2} - 5 + \underline{3x^2} \underline{\underline{-2x}} + 4 \underline{\underline{-2x}} - 1$

$= (2 + 3)x^2 + (-2 - 2)x + (-5 + 4 - 1) = 5x^2 - 4x - 2$

Polynomi kerrotaan monomilla siten, että polynomin jokainen termi erikseen kerrotaan tällä monomilla ja saadut osatulot lasketaan yhteen.

Esimerkki. $2x^2 \cdot (5x - 3) - 3x \cdot (4x^2 - 2) = 2x^2 \cdot 5x + 2x^2 \cdot (-3) - 3x \cdot 4x^2 - 3x \cdot (-2)$

$= 10x^3 - 6x^2 - 12x^3 + 6x = -2x^3 - 6x^2 + 6x$

Kaksi polynomia kerrotaan keskenään osittelulakia käyttäen siten, että ensimmäisen polynomin jokaisella termillä kerrotaan toisen polynomin jokainen termi, minkä jälkeen samanasteiset termit yhdistetään:

Esimerkki. $(2x + 3)(4x^2 - x) = 2x \cdot 4x^2 + 2x \cdot (-x) + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot (-x)$

$= 8x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 3x = 8x^3 + 10x^2 - 3x$

Huomautus. Tulopolynomin aste on tekijäpolynomien asteiden summa.

Kahden polynomin osamäärää voidaan seuraavan esimerkin mukaisesti joskus sieventää jakamalla osoittaja ja nimittäjä ensin tekijöihin ja supistamalla lopuksi.

Esim. $\dfrac{24x^3-54x}{10x^3+15x^2} \overset{\substack{\text{Sekä jaettavassa että jakajassa}\\ \text{voidaan erottaa yhteinen tekijä}}}{=} \dfrac{6\cancel{x}\cdot(4x^2-9)}{5x^{\cancel{2}}\cdot(2x+3)} \overset{\substack{\text{Yhden tekijän termit}\\ \text{voidaan lausua neliöinä}}}{=} \dfrac{6((2x)^2-3^2)}{5x\cdot(2x+3)}$

$\overset{\substack{\text{Neliöiden erotus =}\\ \text{summan ja erotuksen tulo}}}{=} \dfrac{6\,\cancel{(2x+3)}(2x-3)}{5x\cdot\cancel{(2x+3)}} = \dfrac{6(2x-3)}{5x} \overset{\substack{\text{On makuasia, kertooko}\\ \text{osoittajan auki}}}{=} \dfrac{12x-18}{5x}$

Polynomia voidaan kutsua tarkemmalla nimellä **monomi, binomi** tai **trinomi**, jos siinä on vastaavasti yksi, kaksi tai kolme termiä.

Huomautus. Polynomi jaetaan monomilla siten, että polynomin jokainen termi erikseen jaetaan kyseisellä monomilla.

Esimerkki. $\dfrac{8x^3+5x^2-6}{2x} = \dfrac{8x^3}{2x} + \dfrac{5x^2}{2x} - \dfrac{6}{2x} = 4x^2 + 2.5x - \dfrac{3}{x}$

Monitermisellä polynomilla jakaminen on monomilla jakamista työläämpää. Polynomi voidaan jakaa toisella polynomilla jakokulmassa seuraavan mallin mukaisesti:

Esimerkki. Tarkastellaan jakolaskua $\dfrac{x^6-4x^3+5x-2}{2x^3-4x+6}$.

Riville (2) on kirjoitettu jakaja jakokulman eteen ja jakokulman sisään on kirjoitettu jaettava täydennettynä puuttuvilla viidennen, neljännen ja toisen asteen termeillä. Näitä nollakertoimisia termejä ei välttämättä tarvitse kirjoittaa näkyviin, mutta jaettavan sisään on ainakin varattava niille tilaa, sillä sen asteisia termejä voi laskun kuluessa tulla mukaan.

$$
\begin{array}{r|lllllll|r}
 & 0.5x^3 & & +x & -3.5 & & & & (1)\\
\cline{2-8}
2x^3-4x+6 & x^6 & +0x^5 & +0x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -2 & (2)\\
 & x^6 & & -2x^4 & +3x^3 & & & & (3)\\
\cline{2-8}
 & & & 2x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +5x & -2 & (4)\\
 & & & 2x^4 & & -4x^2 & +6x & & (5)\\
\cline{4-8}
 & & & & -7x^3 & +4x^2 & -x & -2 & (6)\\
 & & & & -7x^3 & & +14x & -21 & (7)\\
\cline{5-8}
 & & & & & +4x^2 & -15x & +19 & (8)
\end{array}
$$

Ensin jaettavan korkeimman asteen termi x^6 jaetaan jakajan korkeimman asteen termillä $2x^3$, jonka jälkeen voidaankin merkitä osamäärän ensimmäinen termi $0.5x^3$ riville (1). Jaettavan alapuolelle vastintermit kohdakkain riville (3) on laskettu tulo $0.5x^3\cdot(2x^3-4x+6) = x^6-2x^4+3x^3$, joka on sitten vähennetty jaettavasta. Jaettavaa jää tässä vaiheessa vielä jäljelle riville (4) merkityt $2x^4-7x^3+5x-2$. Jäljellä olevan jaettavan korkeimman asteen termi $2x^4$ on taas jaettu jakajan korkeimman asteen termillä $2x^3$, jolloin voidaankin merkitä osamäärän toinen termi x riville (1). Riville (5) on laskettu tulo $x\cdot(2x^3-4x+6) = 2x^4-4x^2+6x$, joka on vähennetty rivillä (4) olleesta jaettavasta ja vielä jäljelle jäävä jaettava $-7x^3+4x^2-x-2$ on laskettu riville (6). Jakolasku $\dfrac{-7x^3}{2x^3} = -3.5$ antaa osamäärän viimeisen termin. Jakoa ei voi enää jatkaa pidemmälle, koska tulon

$-3.5\cdot(2x^3-4x+6)=-7x^3+14x-21$ vähentämisen jälkeen jäävä lopullinen jakojäännös $4x^2-15x+19$ on alempaa astetta kuin jakaja.

Jakolaskun tuloksen voi ilmoittaa esimerkiksi yhtälönä

$$\frac{x^6-4x^3+5x-2}{2x^3-4x+6}=0.5x^3+x-3.5+\frac{4x^2-15x+19}{2x^3-4x+6}$$

tai ilmoittamalla osamäärän $0.5x^3+x-3.5$ ja jakojäännöksen $4x^2-15x+19$.

Huomautus. Edellisessä esimerkissä polynomi x^6-4x^3+5x-2 on **jaettava** ja polynomi $2x^3-4x+6$ on **jakaja**. Koska jako ei nyt mennyt tasan, niin lopputuloksena saatiin (ns. **vaillinainen) osamäärä** $0.5x^3+x-3.5$ ja **jakojäännökseksi** jäi vielä $4x^2-15x+19$. Näiden välillä on voimassa lukujen yhteydestä tuttu yhtälö

$$\boxed{\text{Jaettava} \equiv \text{jakaja}\times\text{osamäärä}+\text{jakojäännös}\,.}$$

Tämän yhtälön avulla voi tarkistaa jakolaskun paikkansapitävyyden. Edellisen esimerkin tulos on oikea, koska siinä

$$\text{jakaja}\times\text{osamäärä}+\text{jakojäännös}=(2x^3-4x+6)\cdot(0.5x^3+x-3.5)+(4x^2-15x+19)$$
$$=x^6+2x^4-7x^3-2x^4-4x^2+14x+3x^3+6x-21+4x^2-15x+19=x^6-4x^3+5x-2$$
$$=\text{jaettava}\,.$$

Huomautus. Polynomien jakolasku on mahdollista suorittaa ”auki”, jos jaettavan aste on vähintään jakajan asteen suuruinen. Tällöin on yleisesti voimassa

$$\boxed{\text{Polynomien osamäärän aste} = \text{jaettavan aste} - \text{jakajan aste}\,.}$$

$$\boxed{\text{Mahdollisen jakojäännöksen aste on pienempi kuin jakajan aste}\,.}$$

Huomautus. Jos polynomien jakolasku menee tasan, niin jakojäännös on nollapolynomi, jonka astetta ei ole määritelty. Tällaisessa tapauksessa voimme kuitenkin ilman suurta virhettä sanoa, että jakojäännöksenä olevan nollapolynomin aste on pienempi kuin jakajan aste. Niinpä edellisen huomautuksen jälkimmäinen tulos voidaan suurpiirteisesti ilman suurta virhettä esittää muodossa

Jakojäännöksen aste on pienempi kuin jakajan aste.

Esimerkki. Jos viidennen asteen polynomi jaetaan toisen asteen polynomilla, niin osamäärän aste on $5-2=3$. Näin ollen osamäärä on muotoa Ax^3+Bx^2+Cx+D, missä $A\neq 0$, mutta kertoimet *B, C* ja/tai *D* voivat olla nolliakin.
Samassa jakolaskussa mahdollisen jakojäännöksen aste on pienempi kuin 2 eli jakojäännös on muotoa $Ex+F$, missä kertoimet *E* ja/tai *F* voivat olla nolliakin.

12. YHTÄLÖIDEN RATKAISEMISESTA YLEISESTI

Yhtälö tarkoittaa kahden lausekkeen merkittyä yhtäsuuruutta. Yhtälö on siis kirjoitelma, jossa yhtäsuuruusmerkin kummallakin puolella on luvuista ja/tai kirjainsymboleista muodostuvat matemaattiset lausekkeet.

Mikäli yhtälössä ei esiinny lainkaan tuntemattomia muuttujia, niin yhtälö on joko **tosi** tai **epätosi** sen mukaan, ovatko lausekkeet yhtä suuret vai erisuuret.

Esimerkki. Yhtälö $2+2=4$ on tosi, mutta yhtälö $2+3=6$ on epätosi.

Huomautus. Jatkossa me olemme kiinnostuneita sellaisista yhtälöistä, joissa esiintyy yksi tai useampi tuntematon muuttuja. Tällainen yhtälö voi olla

- **Identtinen yhtälö**, jos se on tosi kaikilla muuttujien arvoilla. Monet matematiikan kaavat ovat identtisiä yhtälöitä kuten esimerkiksi

  $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

  Tällaisessa identtisessä yhtälössä yhtäsuuruusmerkki $=$ voidaan korvata merkinnällä $\equiv$ ("identtisesti yhtä suuret").

- **Ehdollinen yhtälö**, jos se toteutuu vain joillakin tuntemattomien muuttujien arvoilla. Ehdollisia yhtälöitä ovat esimerkiksi

  $x^2 = 4$, joka toteutuu vain, jos $x = \pm 2$,

  $x + y = 1$, joka toteutuu millä tahansa x:n arvolla, kunhan vain $y = 1 - x$.

- **Mahdoton yhtälö**, jos se ei toteudu millään tuntemattomien muuttujien arvoilla. Yhtälö $x+1=x+2$ on selvästi mahdoton.

Yhtälön ratkaiseminen tarkoittaa tuntemattomien muuttujien kaikkien sellaisten arvojen hakemista, joilla yhtälö toteutuu. Näitä tuntemattomien arvoja sanotaan yhtälön **ratkaisuiksi tai juuriksi**.

Yksinkertaisimmat yhtälöt voi ratkaista käyttäen seuraavia toimenpiteitä:

1. Sievennetään erikseen yhtälön kumpaakin puolta suorittamalla merkittyjä laskutoimituksia.
2. Yhtälön kummallekin puolelle voidaan lisätä (tai vähentää) sama luku tai lauseke.
3. Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla nollasta eroavalla luvulla tai lausekkeella.

Voidaan osoittaa, että alkuperäisellä yhtälöllä ja siitä toimenpiteillä 1-3 johdetulla yhtälöllä on samat juuret, toisin sanoen alkuperäinen yhtälö ja siitä johdettu yhtälö ovat **yhtäpitävät eli ekvivalentit**. Yhtälön eri muotojen yhtäpitävyys voidaan merkitä kirjoittamalla eri vaiheiden väliin ns. ekvivalenssinuolet $\Leftrightarrow$.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälö $2(x+1)=5(x-2)$ käyttäen edellä esitettyjä vaiheita.

$2(x+1)=5(x-2)$	Suoritetaan merkityt laskutoimitukset
$\Leftrightarrow \quad 2x+2=5x-10$	Lisätään yhtälön kummallekin puolelle $-2-5x$, jotta vakiotermi häviäisi vasemmalta ja x:t oikealta puolelta
$\Leftrightarrow \quad 2x+2-2-5x=5x-10-2-5x$	Suoritetaan merkityt laskutoimitukset
$\Leftrightarrow \quad -3x=-12$	Jaetaan yhtälön kumpikin puoli luvulla -3
$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=4}}$	

Yhtälön ratkaisussa olisi hyvä merkitä kussakin vaiheessa seuraavaksi suoritettava toimenpide yhtälön perään vaikkapa lyhyestikin seuraavan mallin mukaisesti:

$$
\begin{array}{rcl}
 & 2(x+1)=5(x-2) & \mid \text{Poistetaan sulut} \\
\Leftrightarrow & 2x+2=5x-10 & \mid +(-2-5x) \\
\Leftrightarrow & 2x+2-2-5x=5x-10-2-5x & \mid \text{Yhdistetään termit} \\
\Leftrightarrow & -3x=-12 & \mid :(-3) \\
\Leftrightarrow & \underline{\underline{x=4}} &
\end{array}
$$

Huomautus. Yhtälön ratkaisemisessa käytettävä toimenpide 2 voidaan ilmoittaa myös toisin:

2´. Yhtälöä ratkaistaessa yhtälön termi (eli yhteenlaskettava) saadaan siirtää yhtälön toiselle puolelle, kunhan siirretyn termin merkki samalla muutetaan.

Pohjimmiltaan kyse on kuitenkin saman termin lisäämisestä (tai vähentämisestä) yhtälön kummallekin puolelle.

Esimerkki. Termin siirron yhtälön puolelta toiselle merkkiä vaihtaen voi merkitä edellisen tehtävän ratkaisuun vaikkapa viereisen mallin mukaisesti:

$$
\begin{array}{rcl}
 & 2(x+1)=5(x-2) & \\
\Leftrightarrow & 2x+2=5x-10 & \\
\Leftrightarrow & 2x-5x=-10-2 & \\
\Leftrightarrow & -3x=-12 & \mid :(-3) \\
\Leftrightarrow & \underline{\underline{x=4}} &
\end{array}
$$

Huomautus. Edellä käsitelty **termin siirtämistä koskeva ohje koskee vain koko termiä, ei termin tekijää**. Varo siis, ettet vahingossa siirrä termin tekijää merkkiä vaihtaen omaksi termikseen yhtälön toiselle puolelle.

Esimerkiksi yhtälöstä $2x = 10$ ei mitenkään saada $x = 10 - 2 = 8$, koska tällöin olisit käsitellyt alun perin yhtä suuria lausekkeita eri tavoin: olisit jakanut vasemman puolen kahdella ja oikeasta puolesta olisit vähentänyt kakkosen. Nyt on oikein jakaa alkuperäisen yhtälön molemmat puolet kahdella, jotta uusi yhtälö olisi ekvivalentti alkuperäisen kanssa: $x = \frac{10}{2} = 5$.

Huomautuksia.

- Yhtälön ratkaisussa ekvivalenssinuolet jätetään usein pois, varsinkin jos yhtälön eri vaiheet kirjoitetaan allekkain.
- Ekvivalenssinuolia ei saa korvata yhtäsuuruusmerkeillä, koska tällöin kirjoitettaisiin näkyviin mahdottomia yhtäsuuruuksia:
  esimerkiksi edellisen esimerkin kaksi viimeistä riviä merkitsisi yhdessä, että $-3x = -12 = x = 4$. Tämä on mahdotonta, koska eihän -12 voi olla 4.
- Toimenpiteitä 2 ja 3 saa käyttää **yhtälöiden ratkaisemiseen, mutta ei lausekkeiden sieventämiseen**, koska näissä toimenpiteissä lausekkeen suuruus muuttuu. Esimerkiksi **seuraavanlainen lausekkeen "sieventäminen" on siis väärin**:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$	Kerrotaan lauseke nimittäjien pienimmällä yhteisellä jaettavalla 6
$\overset{\text{VÄÄRIN!}}{=} 6(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})$	Lausekkeen suuruus muuttui kuusinkertaiseksi, joten lauseke ei ole enää alkuperäisen suuruinen! Niinpä yhtäsuuruusmerkki ei ole voimassa tämän rivin alussa.
$= 3+4=7$.	

- Mikäli ratkaiset yhtälön käyttäen vain toimenpiteitä 1-3, niin löytämiesi juurten pitäisi yhtälöön sijoitettuna toteuttaa yhtälö. Jos yhtälö ei kuitenkaan toteudu, niin tämä merkitsee, että olet tehnyt jossakin laskuvirheen, joka sinun pitäisi etsiä. Jos et löydä virhettä, niin sinun tulee johtopäätöksenä todeta, että jossakin täytyy olla virhe, vaikket sitä löydäkään. Tällaisessa tapauksessa et saa mennä kirjoittamaan, että yhtälöllä ei ole juuria.
- Tilan säästämiseksi yhtälön ratkaisemisen useampia vaiheita voidaan esittää yhdellä rivillä. Tällöin ekvivalenssinuolet ovat selvyyden vuoksi tarpeen yhtälön eri vaiheiden välillä:

$$2(x+1)=5(x-2) \;\Leftrightarrow\; 2x+2=5x-10 \;\Leftrightarrow\; 2x-5x=-10-2$$
$$\Leftrightarrow\; -3x=-12 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=4}}\,.$$

13. ERILAISIA YHTÄLÖITÄ RATKAISUMENETELMINEEN

Ensimmäisen asteen yhtälö eli lineaarinen yhtälö on muotoa

$$a \cdot x + b = 0 \ ,$$

missä $a \neq 0$. Tällä lineaarisella yhtälöllä on yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{a}$.

Esimerkki.

$$\begin{aligned}
& (x+3)^2 = x \cdot (x+2) && \mid \text{Kerrotaan auki} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2x && \mid -x^2 - 2x - 9 \\
\Leftrightarrow \quad & 4x = -9 && \mid :4 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälö $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (missä $a \neq 0$) voidaan ratkaista käyttäen ratkaisukaavaa

$$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \ .}$$

Esimerkki. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad \mid$ Nyt $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \underline{\underline{1}} \\ \frac{4-2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{cases} .$$

Esimerkki. $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\quad \mid$ Nyt $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. Huomaa, että x^2:n kerroin on 1.

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{6} = \left. \begin{cases} \frac{6+0}{2} = 3 \\ \frac{6-0}{2} = 3 \end{cases} \right\} = \underline{\underline{3}}$$

Esimerkki. $3x^2 - 4x + 2 = 0$ $\quad \mid$ Nyt $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} \ .$$

Koska negatiivisen luvun neliöjuurta ei ole määritelty tämän kurssin tiedoilla, niin sopiva vastaus on tällä kurssilla, että <u>yhtälöllä ei ole (reaalisia) ratkaisuja</u>.

Huomautus. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassa neliöjuuren alla olevaa lauseketta sanotaan **diskriminantiksi** ja se merkitään usein kirjaimella $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
Jos diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi reaalista juurta, joista toinen saadaan käyttäen neliöjuuren edessä merkkiä $+$ ja toinen käyttäen merkkiä $-$.
Jos diskriminantti on nolla, niin kaava antaa saman reaalijuuren kaksi kertaa.
Jos diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole reaalisia juuria.

Huomautus. Toisen asteen yhtälön matemaattisesti oikeista juurista toinen on usein geometrisesti tai fysikaalisesti sopimaton tutkittavan ilmiön ratkaisuksi.

Huomautus. Jos toisen asteen yhtälö on vaillinainen ts. jos siitä puuttuu ensimmäisen asteen termi tai vakiotermi, niin ratkaisukaavaa ei kannata käyttää, vaan nopeampi tapa on menetellä seuraavien huomautusten mukaan.

Huomautus. Jos p on positiivinen, niin

$$x^2 = p \iff x = \pm\sqrt{p} \, .$$

Esimerkki. Määritä neliön sivu s, kun neliön ala $A = 12.0 \text{ m}^2$.

Koska $A = s^2$, niin $s = \pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{12 \text{ m}^2} \approx \pm 3.46 \text{ m}$, joista negatiivinen arvo ei tietenkään kelpaa neliön sivun pituudeksi.

Huomautus. Ratkaistaessa yhtälöä, jossa tulo on merkitty nollaksi, voit käyttää **tulon nollasääntöä:**

Tulo on nolla silloin ja vain silloin, kun ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.

Esimerkki. $x^2 - 5x = 0$ | Tämä vaillinainen toisen asteen yhtälö kannattaa ratkaista tulon nollasääntöä käyttäen.

$$\iff x \cdot (x - 5) = 0$$

$$\iff \underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 5}}$$

Huomautus. Tulon nollasääntöä voi hyödyntää myös korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemisessa.

Esimerkki. $x^3 - x = 0 \iff x \cdot (x^2 - 1) = 0 \iff x \cdot (x^2 - 1^2) = 0$

$$\iff x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \iff \underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = -1}}$$

Murtoyhtälössä tuntematon esiintyy nimittäjissä. Koska nollalla jakamista ei ole määritelty, niin nimittäjän nollakohta ei voi tietenkään olla murtoyhtälön juuri.

Murtoyhtälö ratkaistaan usein kertomalla kaikki nimittäjät pois yhtälöstä. Tämä tapahtuu kertomalla yhtälön molemmat puolet
- joko kaikkien nimittäjien tulolla
- tai kaikkien nimittäjien pienimmällä yhteisellä jaettavalla, jolloin tuntemattomalle saatava lauseke on heti supistetummassa muodossa.

Esimerkki. Ratkaistaan x yhtälöstä

$$\frac{2}{x-3}+4=\frac{5}{6}$$

On oltava $x-3\neq 0$. Koska lopuksi on tarkistettava tämän ehdon voimassaolo, niin yhtäpitävyyttä esittävä ekvivalenssinuoli korvataan yksisuuntaista seurausta kuvaavalla implikaationuolella $\Rightarrow$

$\cdot 6(x-3)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow & 2\cdot 6+4\cdot 6(x-3)&=5\cdot(x-3)\\
&\Leftrightarrow & 12+24x-72&=5x-15\\
&\Leftrightarrow & 24x-5x&=-15-12+72\\
&\Leftrightarrow & 19x&=45\\
&\Leftrightarrow & x&=\frac{45}{19}
\end{aligned}$$

Tämä kelpaa yhtälön juureksi, koska $x\neq 3$.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{x+3}{x\cdot(x-3)}$$

On oltava $x\neq 0$ ja $x\neq 3$.
Tarkistetaan lopuksi ehdon voimassaolo.
$\cdot x\cdot(x-3)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow & (x-1)\cdot x&=x+3\\
&\Leftrightarrow & x^2-2x-3&=0\\
&\Leftrightarrow & x&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3 & \text{Tämä ei kelpaa.}\\ -1\end{cases}
\end{aligned}$$

Vastaus: $x=-1$

Esimerkki. Olkoot a ja b nollasta eroavia, keskenään erisuuria lukuja. Ratkaistaan x seuraavasta fysiikassa hyvin tavallisentyyppisestä yhtälöstä

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$$

Oltava $x\neq 0$
$\cdot x\cdot a\cdot b$

$$\Rightarrow \quad a\cdot b+x\cdot b=x\cdot a$$

Siirrä x:t vasemmalle, muut oikealle.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & x\cdot b-x\cdot a&=-a\cdot b\\
&\Leftrightarrow & x\cdot(b-a)&=-a\cdot b\\
&\Leftrightarrow & x&=\,^{-1)}\frac{-a\cdot b}{b-a}=\frac{a\cdot b}{a-b}
\end{aligned}$$

(Saatu arvo eroaa nollasta ja kelpaa siis juureksi)

Samaan lopputulokseen päästään myös vähän toisin välivaiheitn:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b} \quad \Big| \text{ Oltava } x \neq 0 \text{; Siirrä vakiotermit vasemmalle, muut oikealle.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{x} \quad \Big| \cdot x \text{, oltava } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=-1 \quad \Big| :\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \overset{a\cdot b)}{} \frac{-1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \overset{-1)}{} \frac{-a\cdot b}{b-a} = \underline{\underline{\frac{a\cdot b}{a-b}}}$$

(Saatu arvo eroaa nollasta ja kelpaa siis juureksi)

Esimerkki. Ratkaistaan T vakioiden η $(0<\eta<1)$ ja T_0 $(\neq 0)$ avulla yhtälöstä

$$\eta = \frac{T-T_0}{T} \quad \Big| \cdot T$$

$$\eta \cdot T = T - T_0 \quad \Big| \text{ Siirrä } T \text{ vasemmalle ja yhdistä } T\text{:t}$$

$$(\eta-1)\cdot T = -T_0 \quad \Big| :(\eta-1)$$

$$T = \overset{-1)}{} \frac{-T_0}{\eta-1} = \underline{\underline{\frac{T_0}{1-\eta}}}$$

14. YHTÄLÖPARIN RATKAISEMISESTA

Kahden tuntemattoman yhtälöparia ratkaistaessa haetaan kaikkia niitä tuntemattomien arvoja, jotka toteuttavat molemmat annetut yhtälöt.

Hyvin usein yhtälöpari ratkaistaan **sijoituskeinolla**, jolloin jommastakummasta yhtälöstä ”ratkaistaan” toisen tuntemattoman lausekkeena se tuntematon, joka on kaikkein helpoimmin näin ”ratkaistavissa”. Kun "ratkaistun" tuntemattoman lauseke sijoitetaan käyttämättömään yhtälöön, jää jäljelle vain yksi tuntematon, joka ratkaistaan. Kun saatu arvo sijoitetaan alussa "ratkaistun" tuntemattoman lausekkeeseen, saadaan tämäkin lopullisesti ratkaistua.

Esimerkki. Ratkaistaan edellisten ohjeiden mukaisesti yhtälöpari

$$\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+y=9 \quad \Leftrightarrow \quad y=9-3x \end{cases}$$

Helpointa on ratkaista jälkimmäisestä yhtälöstä y. Tuntemattoman x ratkaiseminen kummasta yhtälöstä tahansa tai y:n ratkaiseminen ensimmäisestä yhtälöstä johtaisi hankalampaan murtokertoimiseen lausekkeeseen.

Sijoitetaan y:lle saatu lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

$$7x-3(9-3x)=5 \quad \overset{\text{Ratkaistaan } x}{\Leftrightarrow} \quad \underline{\underline{x=2}}$$

Sijoitetaan x:n arvo edellä ratkaistuun y:n lausekkeeseen

$$\underline{\underline{y}} = 9-3x = 9-3\cdot 2 = \underline{\underline{3}}$$

Sijoittamalla on helppo todeta, että löydetyt arvot toteuttavat molemmat yhtälöt.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x+y^2-2y-9=0 \\ \quad x+2y-7=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=7-2y \end{cases}$$

Helpointa on ratkaista alemmasta *x*, jonka lauseke sijoitetaan ylempään

$$\Rightarrow \quad 2(7-2y)+y^2-2y-9=0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2-6y+5=0$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}$$

Sijoitetaan nämä *x*:n lausekkeeseen

$$\begin{cases} \text{Jos } y=5, \text{ niin } x=7-2y=7-2\cdot5=-3 \\ \text{Jos } y=1, \text{ niin } x=7-2y=7-2\cdot1=5 \end{cases}$$

Vastaus: $\begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$ tai $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

15. KÄYTÄNNÖN SOVELLUKSIA

Mikäli haluat käyttää yhtälöä jonkin tuntemattoman suureen arvon selvittämiseen, niin Sinun tulee esittää jokin sopiva suure kahdella erilaisella tavalla, jotta saisit yhtälön tuntemattoman ratkaisemiseksi.

Sinun tulee kertoa käyttämäsi merkinnät selvästi, jotta lukija (tai Sinä itsekin myöhemmin) saisi esityksestäsi selvää. Myös muodostamasi yhtälön sisältö on selvitettävä sanallisesti seuraavien esimerkkien mukaisella tavalla.

Esimerkki. Mikä on tuotteen lähtöhinta, jos hinta 7 prosentin alennuksen jälkeen on 1153.20 €?

Ratkaisu. Olkoon lähtöhinta *x*.

Kirjoitetaan ensin alennettua hintaa koskeva yhtälö, josta ratkaistaan lähtöhinta:

Alennettu hinta = lähtöhinta − alennus .

$$1153.20\text{ €} = x - \frac{7}{100}\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1153.20\text{ €} = 0.93x$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1153.20\text{ €}}{0.93}=1240\text{ €}$$

Vastaus: Lähtöhinta on 1240.00 € .

Esimerkki. Mikä on tasaisella nopeudella liikkuvan auton nopeus, jos nopeuden vähentäminen määrällä 12 km/h lisää 125 kilometrin matkalla aikaa 18 minuuttia?

Ratkaisu. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi lausumme ajansäästön tunteina

$$18\text{ min}=18\cdot\frac{\text{h}}{60}=0.3\text{ h}$$

ja jätämme yksiköt pois.

Olkoon alkuperäinen nopeus v.

Muodostetaan ajanlisäystä koskeva yhtälö:

Ajan lisäys = uusi aika − alkuperäinen aika . | aika = $\dfrac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$

$$(*) \qquad 0.3 = \frac{125}{v-12} - \frac{125}{v} \qquad \Big| \cdot v \cdot (v-12)$$

$$0.3v^2 - 3.6v = 125v - 125(v-12) \qquad \Big| \text{ Kerro auki ja siirrä termit vasemmalle}$$

$$0.3v^2 - 3.6v - 1500 = 0 \qquad \Big| :0.3$$

$$v^2 - 12v - 5000 = 0 \qquad \Big| \text{ Käytä ratkaisukaavaa}$$

$$v = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-5000)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{20144}}{2} \approx \frac{12 \pm 141.93}{2} \approx \begin{cases} 76.965 \\ -64.965 \end{cases}$$

Vaikka negatiivinen arvo toteuttaa yhtälön $(*)$, niin se ei kelpaa fysikaalisen tehtävämme ratkaisuksi. Vastaus on lopuksi pyöristettävä sopivaan tarkkuuteen.

Vastaus: Kysytty nopeus on 77 km/h .

Huomautus. Edellä ollut yhtälö $(*)$ kannattaa käytännössä laskuvirheidenkin välttämiseksi ratkaista tietoteknisiä apuvälineitä hyödyntäen.

Huomautus. Yleistyneen tavan mukaisesti tämän esimerkin laskut laskettiin mukavuussyistä ilman yksiköitä. **Näin meneteltäessä kaikissa esiintyvissä suureissa on käytettävä esimerkiksi samaa ajan yksikköä.** Koska auton nopeus halutaan ilmoittaa yksiköissä km/h, niin ajan yksiköksi valittiin laskuissa tunti ja siksi ajan lisäys 18 minuuttia muunnettiin myös tunneiksi. Matkan yksikkönä sekä matkan pituudessa että auton nopeudessa olikin jo valmiiksi sama yksikkö kilometri. Lopuksi saatuun numerovastaukseen liitettiin sitten ilman perusteluja kilometreistä ja tunneista muodostuva nopeuden yksikkö km/h.

Huomautus. Vaikka mukavuussyistä tämä esimerkki laskettiinkin ilman yksiköitä, niin **kehittyneitä tietoteknisiä apuvälineitä käytettäessä laskut kannattaa suorittaa antaen apuvälineelle lähtösuureet alkuperäisine yksiköineen.** Apuvälineet käsittelevät näet varmastikin ihmistä luotettavammin yksiköitä. Laskujen lopuksi voimme sitten valita esimerkiksi sen, käytetäänkö vastauksessa ajan yksikkönä esimerkiksi sekuntia, tuntia vai vuorokautta. **Yksiköiden käyttö on myös perinteinen tapa lähtöyhtälön mahdollisen virheellisyyden selvittämiseksi.** Tiedämme näet omasta kokemuksestamme, että monet opiskelijat (mutta et toivottavasti sinä) kirjoittavat ajatuksissaan vaikkapa keskinopeudelle **väärän laskukaavan** $v = \dfrac{t}{s}$. Yksiköitä apuvälineissä käytettäessä keskinopeudelle saataisiin tällöin **väärä yksikkö** h/km, josta on helppo huomata, että jossakin on tapahtunut paha virhe.

Esimerkki. Millä nopeudella autoilijan on ajettava matkan loppuosa, jotta keskinopeudeksi koko matkalla tulisi 120 km/h, jos hän on jo ajanut tasan puolet matkasta nopeudella 70 km/h ?

Ratkaisu. Olkoon koko matkan pituus $2s$ ja kysytty nopeus v.

Muodostamme yhtälön kokonaisajalle ehdosta

Kokonaisaika = 1. osuuden aika + 2. osuuden aika. $\quad\Big|\quad \text{aika} = \dfrac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$

Seuraavassa kirjoitamme ja ratkaisemme tästä ehdosta saatavan yhtälön rinnakkain kahdella eri tavalla sekä yksiköitä käyttäen että ilman yksiköitä:

Laskut yksiköitä käyttäen

$$\frac{2s}{120\,\text{km/h}} = \frac{s}{70\,\text{km/h}} + \frac{s}{v} \quad \Big| \cdot\frac{120\cdot 7\,\text{km/h}\cdot v}{s}$$
$$14v = 12v + 840\,\text{km/h}$$
$$2v = 840\,\text{km/h} \quad |:2$$
$$v = 420\,\text{km/h}$$

Laskut ilman yksiköitä

$$\frac{2s}{120} = \frac{s}{70} + \frac{s}{v} \quad \Big| \cdot\frac{120\cdot 7\cdot v}{s}$$
$$14v = 12v + 840$$
$$2v = 840 \quad |:2$$
$$v = 420$$

Vastaus: Loppumatka pitäisi ajaa nopeudella 420 km/h. (Turhaan haet laskuvirhettä!)

Huomautus. Jos puolet matkasta olisi ajettu nopeudella, joka olisi alle 60 km/h, niin keskinopeudeksi koko matkalla ei saataisi 120 km/h, vaikka loppupuoli matkasta ajettaisiin valon nopeudella. Aikaa olisi näet kulunut jo alkumatkaan enemmän kuin koko matkaan saisi kaikkiaankin kulua!

Esimerkki. Kuinka paljon 26-prosenttista suolaliuosta pitää lisätä 34 kiloon 12-prosenttista suolaliuosta, jotta lopullisen liuoksen suolapitoisuus olisi 21 %?

Ratkaisu. Merkitään lisättävän 26-prosenttisen suolaliuoksen massaa x:llä.

Jätämme jälleen yksiköt merkitsemättä. Tarvittava yhtälö saadaan ehdosta

Suolan massa alkuperäisessä liuoksessa + suolan massa lisätyssä liuoksessa
= suolan massa lopullisessa liuoksessa .

$$\frac{12}{100}\cdot 34 + \frac{26}{100}\cdot x = \frac{21}{100}\cdot(34 + x) \quad \Big| \cdot 100, \text{ siirretään } x\text{:t vasemmalle, muut termit oikealle}$$
$$26x - 21x = 21\cdot 34 - 12\cdot 34$$
$$5x = 306$$
$$x = 61.2$$

Vastaus: 26-prosenttista liuosta on lisättävä 61 kg .

Esimerkki. Määritä aikuisten ja lasten lippujen kappalehinnat, kun neljä aikuisten ja kolme lasten lippua maksaa 37 € sekä kaksi aikuisten ja neljä lasten lippua maksaa 26 €.

Ratkaisu. Merkitään $x =$ aikuisten lipun hinta, $y =$ lasten lipun hinta.

Kahden tuntemattoman määrittämiseksi tarvitaan kaksi ehtoa, jotka saadaan suoraan esimerkistä:

$$\begin{cases} \text{Neljä aikuisten ja kolme lasten lippua maksaa 37 €.} \\ \text{Kaksi aikuisten ja neljä lasten lippua maksaa 26 €.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+3y=37 \\ 2x+4y=26 \end{cases}$$ Alemmasta yhtälöstä saadaan x:lle helpoin lauseke $\Leftrightarrow\ x=13-2y$, sijoitetaan tämä 1. yhtälöön

$$4(13-2y)+3y=37 \overset{\text{Kerro auki, siirrä vakiot oikealle}}{\Leftrightarrow} -8y+3y=37-52 \Leftrightarrow -5y=-15 \Leftrightarrow y=3$$

Niinpä $x=13-2y=13-2\cdot 3=7$

Vastaus: Aikuisten lippu maksaa 7 € ja lasten lippu 3 € .

Esimerkki. Suorakulmion muotoisen levyn pinta-ala kasvaa 445 mm^2, jos sekä pituus että leveys kasvavat yhden millin. Jos sen sijaan alkuperäinen pituus kasvaa 2 mm ja alkuperäinen leveys pienenee millin, niin ala pienenee 77 mm^2. Määritetään levyn alkuperäiset mitat.

Ratkaisu. Merkitään $x =$ suorakulmion alkuperäinen pituus,
$y =$ suorakulmion alkuperäinen leveys.

Kahden tuntemattoman määrittämiseksi tarvitaan kaksi ehtoa, jotka saadaan suoraan esimerkissä mainituista muutoksista:

$$\begin{cases} \text{Suorakulmion ala 1. muutoksen jälkeen} - \text{alkuperäinen ala} = 445\ \text{mm}^2. \\ \text{Suorakulmion ala 2. muutoksen jälkeen} - \text{alkuperäinen ala} = -77\ \text{mm}^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)\cdot(y+1)-x\cdot y=445 \\ (x+2)\cdot(y-1)-x\cdot y=-77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x\cdot y}+x+y+1-\cancel{x\cdot y}=445 \overset{\text{Ratkaistaan } x}{\Leftrightarrow} x=444-y \\ \cancel{x\cdot y}-x+2\cdot y-2-\cancel{x\cdot y}=-77 \end{cases}$$

Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön

$$-(444-y)+2\cdot y-2=-77 \Leftrightarrow 3\cdot y=-77+444+2 \Leftrightarrow y=123$$

ja edelleen

$$x=444-y=444-123=321.$$

Vastaus: Suorakulmion pituus on 321 mm ja leveys 123 mm .

Esimerkki. Määritetään systemaattisesti laskemalla ilman kokeiluja se kolminumeroinen kokonaisluku, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa.
Luvun viimeinen numero on 5.
Kahden ensimmäisen numeron summa on 13.
Jos lukuun lisätään 450, niin luvun satojen ja kymppien numerot vaihtavat paikkaa.

Ratkaisu. Merkitään $x =$ alkuperäisen luvun satojen numero,
$y =$ alkuperäisen luvun kymppien numero.

Huomaa, että lukua ei saa merkitä $xy5$, koska tämä kirjoitelma voidaan tulkita joko kolmen tekijän kertolaskuksi $x \cdot y \cdot 5$ tai muuttujanimeksi $xy5$, mutta mikään apuvälinekään (joilla laskut käytännössä useimmiten lasketaan) ei tajua merkintää $xy5$ kolminumeroiseksi kokonaisluvuksi. **Jos kolminumeroisen kokonaisluvun peräkkäiset numerot ovat x, y ja 5, niin kyseinen luku on**
x sataa y kymmentä viisi ykköstä eli $x \cdot 100 + y \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 100x + 10y + 5$.
Jos satojen ja kymppien numerot vaihtavat paikkaa, niin kyseessä on luku
y sataa x kymmentä viisi ykköstä eli $100y + 10x + 5$.
Kahden tuntemattoman x ja y määrittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä, jotka saadaan esimerkin kahdesta viimeisestä ehdosta:

$$\begin{cases} \text{Kahden ensimmäisen numeron summa on 13 .} \\ \text{Jos lukuun lisätään 450, niin luvun satojen ja kymppien numerot vaihtavat paikkaa.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ (100x + 10y + 5) + 450 = 100y + 10x + 5 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{Ratkaistaan } x \\ \text{Siirretään kaikki termit vasemmalle} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ 90x - 90y + 450 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön 90:llä jakamisen jälkeen.} \\ :90 \text{ , jolloin saadaan } x - y + 5 = 0 \text{ .} \end{array}$$

Sijoituksen jälkeen $(13 - y) - y + 5 = 0$, josta saadaan $y = 9$.
Lopuksi $x = 13 - y = 13 - 9 = 4$.
Vastaus: Etsitty luku on 495 .

Esimerkki. Käytettävissä on kahta viereisen taulukon mukaista suola-sokeri-vesiliuosta:

	Liuos 1	Liuos 2
Suolapitoisuus	5.00 %	2.00 %
Sokeripitoisuus	1.00 %	10.00 %

On annettava ohje, miten näistä liuoksista ja vedestä voidaan sekoittaa 30.0 kg liuosta, jonka suola- ja sokeripitoisuudet kumpikin ovat 2.00 %.

Ratkaisu. Merkitään: Liuosta 1 tarvitaan x kg, liuosta 2 tarvitaan y kg.

Tarvittavan veden massaa voisi hyvin merkitä z:lla, mutta silloin meillä olisi kolme tuntematonta, joiden kaikkien ratkaisemiseen tarvittaisiin kolme ehtoakin. Jotta välttäisimme kolmen tuntemattoman yhtälöryhmän käytön tässä kertausoppaassa, lausummekin tarvittavan veden massan heti muiden liuosten massojen avulla. Niinpä

$\boxed{\text{vettä tarvitaan } (30 - x - y) \text{ kg}}$.

Tuntemattomien x ja y määrittämiseen tarvittavat ehdot ovat

$$\boxed{\begin{cases} \text{Suolan massa liuoksessa 1} + \text{suolan massa liuoksessa 2} \\ \qquad = \text{suolan massa lopullisessa liuoksessa}. \\ \text{Sokerin massa liuoksessa 1} + \text{sokerin massa liuoksessa 2} \\ \qquad = \text{sokerin massa lopullisessa liuoksessa}. \end{cases}}$$

ja niistä saadaan ilman yksiköitä yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{5}{100} \cdot x + \frac{2}{100} \cdot y = \frac{2}{100} \cdot 30 & \Big| \cdot 100 \\ \frac{1}{100} \cdot x + \frac{10}{100} \cdot y = \frac{2}{100} \cdot 30 & \Big| \cdot 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 60 \\ x + 10y = 60 \quad \Leftrightarrow \quad x = 60 - 10y \end{cases}$$

Sijoitetaan saatu x:n arvo ylempään yhtälöön:

$$5 \cdot (60 - 10y) + 2y = 60 \quad \Leftrightarrow \quad -48y = -240 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5$$

$$x = 60 - 10y = 60 - 10 \cdot 5 = 10.$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Liuosta 1 tarvitaan 10.0 kg, liuosta 2 tarvitaan 5.0 kg ja vettä 15.0 kg}}}$.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

Tämän kertausoppaan laskut on tarkoitettu laskettaviksi ennen kaikkea käsin, mutta tarkistuksenkin vuoksi laskut kannattaa mahdollisuuksien mukaan laskea myös laskimella. **Laskimen käyttöä kannattaa muutenkin harjoitella**, koska myöhemmin käytännössä useimmat laskelmat tehdään tietenkin tietoteknisillä apuvälineillä.

Kunkin tehtävänumeron kohdalla on mainittu jokin etunimi. Etunimen avulla löydät tehtävään annetut ohjeet ja vastaukset etunimen mukaan aakkostettuina. Näin et tehtävän opastusta lukiessasi pääse vahingossa näkemään seuraavan tehtävän ohjeita.

Jos et osaa ratkaista jotakin tehtävää, niin ennen ohjeen lukemista sinun kannattaa lukea tehtävään liittyvää teoriaa kertausoppaan alkuosasta. Tehtävien numeroinnin ensimmäinen numero viittaa sen luvun numeroon, jossa samaa asiaa on käsitelty.

Jos et ymmärrä jonkin tehtävän ratkaisua tai opastusta, niin merkitse tehtävä itsellesi muistiin ja palaa samaan ongelmaan päivän, parin päästä uudelleen. Kyseessä on sellaiset perusasiat, jotka on ehdottomasti ymmärrettävä ja osattava käsinkin laskea, vaikka vastaavat laskut myöhemmin suoritetaan useimmiten tietoteknisiä apuvälineitä hyödyntäen.

1.1. (Jarmo) Murtoluvut $\frac{32}{25}$, $\frac{10101}{2^3 \cdot 5}$, $\frac{111}{2^3 \cdot 5^5}$ voidaan muuttaa desimaalimuotoon suorittamalla jakolasku vaikkapa laskimella. Koska näiden murtolukujen nimittäjissä on alkutekijöinä vain kakkosia ja viitosia, niin sopivan laventamisen jälkeen jakolasku on kuitenkin helppo päässälasku. Suorita murtolukujen muuttaminen desimaalimuotoon molemmilla tavoilla.

1.2. (Helena) Muunna murtoluvut $\frac{29}{15}$, $\frac{41}{11}$, $\frac{789}{111}$, $\frac{765}{101}$ laskinta käyttäen desimaaliluvuiksi. Vastaukset **näyttävät** jaksollisilta, mutta voisikohan vähän pidemmälle laskettaessa löytyä kuitenkin jaksollisuuden rikkova numero? Suorita samat jakolaskut käsin jakokulmassa niin pitkälle, että ymmärrät, miksi osamäärän desimaaliesitys todella on jaksollinen.

1.3. (Samuel) Muunna päättyvät desimaaliluvut 54.3 ja 123.4567 murtoluvuiksi.

1.4. (Amanda) Muunna päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut 12.3333… ja 45.6789898989… murtoluvuiksi.

2.1. (Eino) Laske $\sqrt{13^2 - 12^2}$ sekä laskimella että käsin.

2.2. (Juha) Käytettävissä on seuraavat kokonaislukujen neliöt ja kuutiot.

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n^2	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
n^3	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000	9261	10648	12167	13824	15625

Sievennä lausekkeiden

$$\sqrt{21^2+13^2}\ ,\ \sqrt{21^2-13^2}\ ,\ \sqrt{21^2\cdot 13^2}\ ,\ \sqrt{\frac{21^2}{13^2}}$$

$$\sqrt[3]{21^3+13^3}\ ,\ \sqrt[3]{21^3-13^3}\ ,\ \sqrt[3]{21^3\cdot 13^3}\ ,\ \sqrt[3]{\frac{21^3}{13^3}}$$

tarkat arvot käsin laskien kokonais- tai murtoluvuiksi, mikäli mahdollista. Jos jotakin näistä lausekkeista ei voi lausua pyydetyssä muodossa, niin arvioi annetun taulukon avulla, minkä kokonaislukujen välillä kyseisen lausekkeen arvo on. Esimerkiksi $\sqrt{300}$ on välillä $17<\sqrt{300}<18$, sillä $17=\sqrt{289}<\sqrt{300}<\sqrt{324}=18$. Tarkista tuloksesi laskemalla annettujen lausekkeiden likiarvot myös laskimella kirjoittamalla lausekkeet mahdollisimman alkuperäisessä muodossaan.

3.1. (Roope) Suorita kertolasku $23.4\cdot 4.321$ käsin mahdollisimman tarkasti. Tarkista tuloksesi laskimella.

3.2. (Lilja) Suorita jakolasku $\dfrac{70631}{23}$ jakokulmassa kokonaisten tarkkuudella. Ilmoita vastauksena (vaillinainen) osamäärä ja jakojäännös. Kirjoita näkyviin jaettavaa, jakajaa, (vaillinaista) osamäärää ja jakojäännöstä koskeva ehto ja totea jakolaskusi oikeellisuus tutkimalla tämän ehdon toteutumista.

3.3. (Kaarlo) Suorita jakolasku $\dfrac{2719.653}{12.3}$ sekä laskimella että käsin jakokulmassa. Koska jako menee tasan, niin osamäärän tulee toteuttaa ehto

$$\text{jaettava} = \text{jakaja}\times\text{osamäärä}\,.$$

Totea ehdon toteutuminen suorittamalla oikealla puolella oleva kertolasku käsin.

4.1. (Elias) Laske lausekkeen $18/3\cdot 2-(5-3)\cdot 2^2$ arvo vaiheittain yksi laskutoimitus kerrallaan ilman laskinta kiinnittäen huomiota oikeaan laskujärjestykseen. Alleviivaa aina seuraavaksi laskettava osalauseke seuraavan mallin mukaisesti. Malli: $1-(\underline{2+6})/2\cdot 3=1-\underline{8/2}\cdot 3=1-\underline{4\cdot 3}=\underline{1-12}=-11$.

4.2. (Juhani) a) Laske lausekkeen $12-24/3\cdot 2+2$ arvo edellisessä tehtävässä kuvatulla tavalla alleviivauksia käyttäen yksi laskutoimitus kerrallaan. Lisää lausekkeeseen sitten yhdet sulut siten, että lausekkeen arvoksi saadaan b) 9 c) –6 . Laske myös uudet lausekkeet alleviivauksia käyttäen vaiheittain.

4.3. (Hellen) Muista, että tietyt osalausekkeet on laskettava ennen muita laskutoimituksia, vaikka tällaiset lausekkeet eivät olisikaan sulkeiden sisällä. Tällaisia lausekkeita ovat esimerkiksi pitkän vaakasuoran jakoviivan yläpuolella ja alapuolella olevat lausekkeet, juurimerkin "pitkän viivan" alla oleva lauseke sekä luvun eksponenttina oleva lauseke. Moniin tietoteknisiin apuvälineisiin matemaattiset lausekkeet syötetään vieläkin kirjoittamalla merkkejä peräkkäin vain yhdelle riville käyttämättä ylä- tai alaindeksejä ja merkitsemättä mitään viivaa minkään merkin ylä- tai alapuolelle. Niinpä edellä mainittuja lausekkeita kirjoitettaessa on käytettävä sellaisia sulkeita, joita ei näy lausekkeiden tavallisessa esityksessä. Esimerkiksi

$$\frac{5+4}{2+1}=(5+4)/(2+1)\ ,\quad \sqrt{9+4}=\sqrt{\ }(9+4)\ ,\quad 4^{3^2+1}=4\,\hat{}\,(3\,\hat{}\,2+1)\,.$$

Kirjoita esimerkin mukaisesti yhdelle riville seuraavat lausekkeet ilman, että olet suorittanut mitään laskutoimituksia:

$$\frac{24}{6+2}\ ,\ \frac{30+20}{10-5}\ ,\ 2^{3+1}\ ,\ \sqrt{13^2-5^2}\ ,\ \sqrt{2^2+4^2+4^2}$$

Huomaa, että et voi merkitä eksponenttia ylänurkkaan, koska kaikkien merkkien on oltava perusrivillä. Et voi myöskään kirjoittaa neliöjuuren viivaa luvun yläpuolelle, koska tällainen viiva ei ole perusrivillä.

Laske lopuksi lausekkeiden arvot seuraavilla tavoilla:

- kaikkine välivaiheineen oikeassa laskujärjestyksessä käsin,
- kukin lauseke yhdestä syötteestä laskimellasi mikäli mahdollista.

6.1. (Pentti) Sievennä seuraavat lausekkeet suorittamalla kertolaskut ja yhdistämällä lopuksi samanmuotoiset termit

a) $(t+2)(2t-1)-(t+1)^2$ b) $(2x-y)^2+(x+2y)^2-2(x+2y)(2x+y)$

6.2. (Irma) Tässä tehtävässä tarkastellaan binomin $a+b$ potensseja $(a+b)^n$, kun n on luonnollinen luku 1, 2, 3, … On selvää, että

$$(a+b)^1=1a+1b\ ,$$

missä ykköskertoimet on jatkon kannalta kirjoitettu näkyviin. Teoriaosan luvussa 6 olemme osittelulakia käyttäen nähneet, että

$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2\ .$$

Täydennä osittelulakia käyttäen seuraavien laskujen pisteillä korvatut välivaiheet:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(1a^2+2ab+1b^2)=\textbf{...}=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3)=\textbf{...}$$
$$=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$

$$(a+b)^5=(a+b)(a+b)^4=\textbf{...}=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

$$(a+b)^6 = (a+b)(a+b)^5 = (a+b)(1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5)$$

$$= \underbrace{1a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+1ab^5}_{\text{Saatu } a\text{:lla kertomalla}} +$$

$$\underbrace{1a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+1b^6}_{\text{Saatu } b\text{:llä kertomalla}}$$

Yhdistetään samanmuotoiset termit siten, että ensin otetaan *b*:llä kerrotun termin kerroin

$$= 1a^6+(1+5)a^5b+(5+10)a^4b^2+(10+10)a^3b^3+(10+5)a^2b^4+(5+1)ab^5+1b^6$$

$$= 1a^6+\underbrace{6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5}_{\text{Kaikkia mahdollisia sekatuloja } a^kb^l\text{, missä } k+l=6}+1b^6$$

Huomaa, että $(a+b)^n$ ei ole pelkästään a^n+b^n, kun $n\geq 2$, vaan siinä on mukana myös kaikki sellaiset sekatulot a^kb^l kertoimineen, missä eksponenttien k ja l summa on n.

Kokoamme vielä edellä lasketut aukikerrottujen binomin potenssien $(a+b)^n$ kertoimet ns. **Pascalin kolmio**ksi

1 1	$(a+b)^1$:n kertoimet
1 2 1	$(a+b)^2$:n kertoimet
1 3 3 1	$(a+b)^3$:n kertoimet
1 4 6 4 1	$(a+b)^4$:n kertoimet
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$:n kertoimet
1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6$:n kertoimet

Keksitkö, miten Pascalin kolmion alemman rivin luvut saadaan aina kätevästi aiemmin lasketun yläpuolella olevan rivin luvuista?

Tarvittaessa saat vinkkiä tavasta, jolla potenssin $(a+b)^6$ termien kertoimet laskettiin yhdistettäessä edellä samanmuotoiset termit. Säännön keksittyäsi voit kirjoittaa pari lisäriviä Pascalin kolmioon.

Kirjoita lopuksi potenssien $(a+b)^7$ ja $(a+b)^8$ aukikerrotut lausekkeet Pascalin kolmion avulla helpommin kuin käyttäen toistuvasti osittelulakia.

7.1. (Impi) Laske sekä käsin että laskimella

$$2^4,\ 5^0,\ 0^5,\ 5^{-2},\ 10^{-3},\ (-2)^3,\ -(2^3),\ (-2)^{-3},\ -(2^{-3}),\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3},\ (-1)^{2012},\ (-1)^{2013}$$

7.2. (Lauri) Esitä seuraavat luvut normaalimuodossa ilman kympin potenssia

$$5.6\cdot 10^7\ ,\ \ -6.5\cdot 10^{-4}\ ,\ \ -0.45\cdot 10^6\ ,\ \ 345\cdot 10^{-6}$$

$$3.21\cdot 10^{51} = 321\underbrace{000...000}_{\text{Montako nollaa?}}\ ,\ \ 12.3\cdot 10^{-30} = 0.\underbrace{000...000}_{\text{Montako nollaa?}}123$$

7.3. (Heli) Kirjoita luvut

$$-321\,000\,000\ ,\quad 0.000\,005\,67\ ,\quad 0.\underbrace{000...000}_{67\text{ nollaa}}890\ ,\quad 345\underbrace{000...000}_{67\text{ nollaa}}$$

käyttäen ns. **tieteellistä esitysmuotoa** $\pm a\cdot 10^n$, missä n on sopiva kokonaisluku ja kerroin a on välillä yhdestä kymmeneen oleva luku.

7.4. (Pauli) Kirjoita tehtävän 7.3 luvut käyttäen SI-järjestelmässä suositeltua "**insinöörimuoto**a" $\pm a\cdot 10^n$, missä n on sopiva kolmella jaollinen kokonaisluku ja a on välillä $0.1 \le a < 1000$. Joillakin luvuilla on kaksikin tällaista esitystä, esimerkiksi

$$123\,000\,000\,000 = \begin{cases} 0.123\cdot 10^{12} \\ 123\cdot 10^{9} \end{cases}.$$

Insinöörimuoto on erityisen suositeltava yksiköitä käytettäessä, koska kerrannaisyksiköiden etuliitteet kilo, mega, giga, tera, …, milli, mikro, nano, piko, … esittävät juuri niitä kympin potensseja, joissa eksponentti on kolmella jaollinen.

7.5. (Kalervo) Esitä seuraavat lausekkeet mahdollisimman vähillä merkeillä

$$3a^3\cdot 2a^2\cdot a\ ,\quad 6\cdot\left(b^2\right)^3 - 5\cdot b^{\left(2^3\right)}\ ,\quad \frac{c^2\cdot c^{10}}{c\cdot c^3\cdot c^5}\ ,\quad \left(-2\cdot x\cdot y^2\cdot z^4\right)^3\ ,\quad \left(\frac{-2s\cdot t^2}{u^3}\right)^4$$

7.6. (Suoma) Muunna lausekkeet $\dfrac{(-2)^4\cdot 8^5}{-\left(16^3\right)}$, $\dfrac{4^{\left(2^3\right)}}{\left(8^2\right)^3}$, $\left(\dfrac{1}{1024}\right)^2$, $\dfrac{36^{35}}{24^{70}}$

välivaiheineen kakkosen potensseiksi (eli muotoon 2^n, missä n on positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku). Huomaa, että 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, … ovat kakkosen potensseja.

8.1. (Veikko) Yritä määrittää lausekkeiden

$$a+b\ ,\quad a-b\ ,\quad a\cdot b\ ,\quad \frac{a}{b}\ ,\quad \sqrt{a}$$

tarkat arvot kohdissa a) - d) ja nelinumeroiset likiarvot kohdissa e) – f) **kukin kohta kolmella eri tavalla:**

A) käsin ilman laskinta, mikäli kyseessä on likimain päässälasku,
B) pelkästään laskimella, mikäli se vain on mahdollista,
C) hyödyntäen laskinta mahdollisuuksien mukaan silloin, kun siitä on hyötyä, vaikka laskin ei pystyisikään suoriutumaan koko alkuperäisestä laskusta.

a) $a = 4\cdot 10^{32}$ ja $b = 2\cdot 10^{32}$
b) $a = 4\cdot 10^{-32}$ ja $b = 2\cdot 10^{-30}$
c) $a = 4\cdot 10^{45}$ ja $b = 2\cdot 10^{23}$
d) $a = 4\cdot 10^{1234}$ ja $b = 2\cdot 10^{1237}$
e) $a = 4.567\cdot 10^{1234}$ ja $b = 1.111\cdot 10^{1232}$
f) $a = 4.567\cdot 10^{5432}$ ja $b = 1.111\cdot 10^{4321}$

9.1. (Lotta) a) Muunna metreiksi $5.2\ \mathrm{Tm}$ ja $123\ \mathrm{pm}$.

b) Muunna mikrometreiksi $1.23\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Mm}$.

c) Muunna gigametreiksi $7.2\cdot 10^{19}\ \mathrm{nm}$.

9.2. (Hilkka) Esitä annetut pituudet metrin sopivan kerrannaisyksikön avulla siten, että $0.1 \le$ tarvittava numerokerroin < 1000. Huomaa, että joissakin tapauksissa voi olla kaksikin sopivaa esitysmahdollisuutta.

$2.3\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$, $3.4\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $4.5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $5.6\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$

$6.7\cdot 10^{2}\,\mathrm{m}$, $7.8\cdot 10^{5}\,\mathrm{m}$, $8.9\cdot 10^{7}\,\mathrm{m}$, $9.1\cdot 10^{9}\,\mathrm{m}$, $2.3\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

9.3. (Elli) Muunna ymmärrettävin välivaihein systemaattisesti laskemalla

a) kuutiometreiksi $3.2\cdot 10^{23}\,\mathrm{\mu m^3}$

b) neliönanometreiksi $4.3\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m^2}$

c) kuutiomegametreiksi $5.4\cdot 10^{37}\,\mathrm{mm^3}$

d) yksiköihin $\mathrm{\mu m^4}$ arvo $7.6\cdot 10^{-33}\,\mathrm{km^4}$

e) yksiköihin $\mathrm{Mm^5}$ arvo $8.7\cdot 10^{50}\,\mathrm{mm^5}$

9.4. (Ulla) Esitä seuraavat lausekkeet

$$1.23\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}\ ,\ 2.34\cdot 10^{17}\ \mathrm{m^2}\ ,\ 3.45\cdot 10^{-30}\ \mathrm{m^3}\ ,\ 4.56\cdot 10^{46}\ \mathrm{m^4}$$

käyttäen sellaista pituuden, alan, tilavuuden tai pituuden vieläkin korkeamman potenssin kerrannaisyksikköä pm^n, nm^n, $\mu\mathrm{m}^n$, mm^n, m^n, km^n, Mm^n, Gm^n, Tm^n (missä eksponentti $n = 1, 2, 3, 4$ tilanteesta riippuen), että tarvittava numerokerroin on itseisarvoltaan mahdollisimman pieni, mutta kuitenkin ykköstä suurempi. Koska esimerkiksi $\mathrm{km}^4 = (1000\,\mathrm{m})^4 = 10^{12}\mathrm{m}^4$, niin tarvittavan numerokertoimen suurin mahdollinen arvo voi olla lähes 10^{12} tarkasteltaessa sellaista fysikaalista suuretta, jonka yksikkönä on m^4.

9.5. (Doris) a) Muunna nopeus $0.72\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ yksiköihin $\dfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$.

b) Muunna kiihtyvyys $45\,\dfrac{\mathrm{\mu m}}{\mathrm{s^2}}$ yksiköihin $\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h^2}}$.

c) Muunna tilavuusvirta $8.0\,\dfrac{\mathrm{cm^3}}{\mathrm{s}}$ yksiköihin $\dfrac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{vrk}}$. Keksitkö tätä muunnosta havainnollistavan sanallisen esimerkin?

9.6. (Iida) Muunna lentokoneen polttoaineen kulutus 12 litraa kilometriä kohden laskennallisesti yksiköihin $\mathrm{mm^2}$. Tulkitse saamasi vastaus.

9.7. (Leena) Rikkaruohomyrkyn käyttöohjeessa sanottiin, että laimennettua liuosta levitetään 60 litraa hehtaarille, joka on $10000\,\mathrm{m^2}$. Muunna käyttöohjeen lukema $60\,\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{ha}}$ mikrometreiksi. Tulkitse saamasi vastaus.

10.1. (Yrjö) Perustele, mistä helpoimmin näet, että kokonaisluku
a) 123456 on kahdella jaollinen b) 201003 on kolmella jaollinen
c) 12345 on viidellä jaollinen.

10.2. (Senja) Määritä systemaattisesti hakemalla lukujen 240, 360 ja 432 pienin yhteinen jaettava.

10.3. (Tiina) Suorita annetut murtolukulaskut käsin kiinnittäen huomiota pisimpään pääjakoviivaan, joka sijaitsee tekstin perusrivillä. Niinpä e-kohdassa murtoluku jaetaan toisella murtoluvulla, f-kohdassa kokonaisluku jaetaan murtoluvulla ja g-kohdassa murtoluku jaetaan kokonaisluvulla. Tarkista vastaukset laskimella.

a) $\frac{2}{5}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$ c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{6}{5}:\frac{2}{3}$ d) $\frac{3\cdot 5+11\cdot 5}{3\cdot 7+11\cdot 4}$

e) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ f) $\dfrac{6}{\frac{3}{5}}$ g) $\dfrac{\frac{4}{5}}{8}$ h) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}+\frac{6}{5}}$

10.4. (Oskari) Sievennä a) $\frac{5x+15y+35z}{5a+15b+35c}$ b) $\frac{mx+2m^2y+3m^3z}{mx+m^2y+m^3z}$

c) $\frac{a}{5}+\frac{5}{a}-\frac{1}{5a}$ d) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$ e) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m-n}{m+n}$

11.1. (Markus) Suorita annetut polynomien jakolaskut ja tarkista lopuksi, että löytämäsi osamäärä ja jakojäännös toteuttavat ehdon

$$\text{Jaettava} = \text{jakaja} \times (\text{vaillinainen})\ \text{osamäärä} + \text{mahdollinen jakojäännös}$$

a) $\frac{x^4-9x^2+2x}{x+3}$ b) $\frac{6x^3+5x^2+6x-8}{3x-2}$

11.2. (Anna) Mitä voit sanoa vaillinaisen osamäärän ja mahdollisen jakojäännöksen asteluvuista ja kertoimista, jos seitsemännen asteen polynomi jaetaan kolmannen asteen polynomilla?

11.3. (Frans) Tarkastellaan jakolaskua $\frac{2x^5+3x^4+8x^3+8x^2+12x+5}{2x^2+3x+4}$.

Vaillinainen osamäärä on yksi seuraavista neljästä lausekkeesta:

$$x^4+2x+1\ ,\ x^3+2x+1\ ,\ 2x^3+2x+1\ ,\ x^2+2x+1.$$

Pystytkö päättelemään, mikä näistä on oikea vaillinainen osamäärä?

Jakojäännös on yksi seuraavista kolmesta lausekkeesta: x^2+1 , $2x^2+1$, $x+1$.

Pystytkö päättelemään, mikä näistä on oikea jakojäännös?

12.1. (Toivo) Ratkaise tuntematon x yhtälöistä

a) $-2(x+1)-5=6-3(2-4x)$

b) $m\cdot(x+a)=n\cdot(x+b)$ (Oletetaan, että $m\neq n$)

13.1. (Jukka) Ratkaise ratkaisukaavaa käyttäen toisen asteen yhtälöt

a) $2x^2+3x-5=0$ b) $x^2-4x+4=0$ c) $4x^2+x-5=0$ d) $x^2-6x+10=0$.

Tutki lopuksi sijoittamalla, että löytämäsi juuret todella toteuttavat yhtälön.

13.2. (Liisa) Ratkaise seuraavat vaillinaiset toisen asteen yhtälöt sekä ratkaisukaavaa käyttäen että kätevämmällä tavalla

a) $x^2-6x=0$ b) $x^2-9=0$ c) $3x^2+7x=0$ d) $x^2+5=0$

13.3. (Eemil) Ratkaise yhtälöt

a) $(5x+1)(6x-5)=0$ b) $(3x-2)(3x^2+x-4)=0$ c) $x^3-9x=0$

13.4. (Tuomo) Ratkaise murtoyhtälöt a) $\frac{8}{x+3}=\frac{3}{x+2}+1$ b) $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+4}{x\cdot(x-4)}$

13.5. (Arto) Olkoot a ja b nollasta eroavia, keskenään erisuuria lukuja. Ratkaise T yhtälöstä $\frac{c}{d-T}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

14.1. (Leevi) Ratkaise yhtälöparit a) $\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 3x^2+x-y=2 \end{cases}$

15.1. (Unto) Mikä oli harjoittelijan alkupalkka, jos hänen palkkansa oli 12 prosentin palkankorotuksen jälkeen 1382.08 €

15.2. (Taisto) Mikä on tasaisella nopeudella liikkuvan auton alkuperäinen nopeus, jos nopeuden lisääminen määrällä 18 km/h säästää 360 kilometrin matkalla aikaa 40 minuuttia?

15.3. (Marjo) Millä nopeudella autoilijan on ajettava matkan loppuosa, jotta keskinopeudeksi koko matkalla tulisi 90 km/h, jos hän on jo ajanut tasan kolmasosan matkasta nopeudella 70 km/h ? Selitä merkintäsi sekä yhtälösi oleellinen sisältö.

15.4. (Paula) Paljonko vettä on haihdutettava 42 kilosta 5.5 prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin 7.0 prosenttista liuosta? Selitä merkintäsi ja yhtälösi sisältö.

15.5. (Rasmus) Paljonko on sekoitettava 3-prosenttista ja paljonko 12-prosenttista sokeriliuosta, jotta saataisiin 32 kg 5-prosenttista sokeriliuosta? Selitä käyttämäsi merkinnät ja muodostamasi yhtälön/yhtälöparin sisältö ymmärrettävästi.

15.6. (Hannu) Määritä appelsiinien ja omenien kilohinnat, jos 1.5 kg appelsiineja ja 2.1 kg omenia maksaa 7.32 € sekä 2.3 kg appelsiineja ja 1.9 kg omenia maksaa 8.32 €.

15.7. (Paavo) Suorakulmion muotoisen levyn pinta-ala kasvaa 1113 mm^2, jos pituus kasvaa millin ja leveys kolme milliä. Jos sen sijaan alkuperäinen pituus kasvaa 2 milliä ja alkuperäinen leveys pienenee kolme milliä, niin ala pienenee 783 mm^2. Määritetään levyn alkuperäiset mitat.

15.8. (Martta) Määritä se kolminumeroinen kokonaisluku, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:
Jos lukuun lisätään 495, niin luvun satojen ja ykkösten numerot vaihtavat paikkaa.
Jos lukuun lisätään 27, niin luvun kymppien ja ykkösten numerot vaihtavat paikkaa.
Luvun ykkösten numero on luvun satojen ja kymppien numeroiden summa.

15.9. (Terttu) Käytettävissä on kahta viereisen taulukon mukaista suola-sokeri-vesiliuosta:

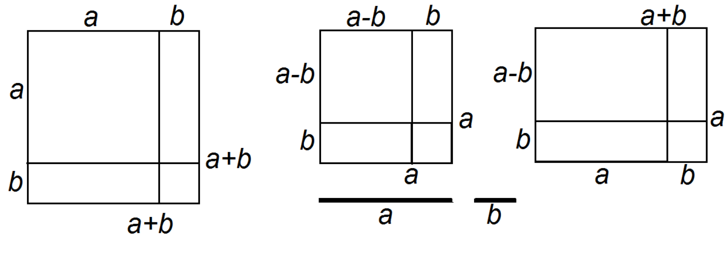
	Liuos 1	Liuos 2
Suolapitoisuus	3.00 %	10.00 %
Sokeripitoisuus	20.00 %	1.00 %

Anna ohje, miten näistä liuoksista ja vedestä voidaan sekoittaa 50.0 kg liuosta, jonka suolapitoisuus on 2.00 % ja sokeripitoisuus 5.00 %.

PÄHKINÖITÄ. Kahden tekijän tuloa $x \cdot y$ voidaan havainnollistaa sellaisen tasossa olevan suorakulmion pinta-alan avulla, jonka sivut ovat *x* ja *y.* Vastaavasti kolmen tekijän tuloa $x \cdot y \cdot z$ voidaan havainnollistaa sellaisen kolmiulotteisessa avaruudessa olevan suorakulmaisen särmiön (”tiiliskiven”) tilavuuden avulla, jonka särmät ovat *x*, *y* ja *z.*

P1. Kertausoppaan kannessa on tarkasteltu binomin $a+b$ kuutiota $(a+b)^3$, jota on havainnollistettu $(a+b)$-sivuisen kuution tilavuuden avulla. Tämä kuutio on leikattu pohja-, sivu- ja päätytahkojen suuntaisilla tasoilla kahdeksaan osaan siten, että leikkaavat tasot jakavat kuution kaikki särmät kahteen osaan, joiden pituudet ovat *a* ja *b*. Olkoon pidemmän osan pituus *a* ja lyhyemmän *b.* Määritä kaikkien kahdeksan osasuorakulmion tilavuudet. Kuinka suuri on osatilavuuksien summa? Minkä algebrallisen tuloksen olet juuri geometrisesti todennut oikeaksi?

P2. Viereisten monikulmioiden sivut on saatu yhteen- ja/tai vähennyslaskulla kuvassa vahvennettuina esitetyistä janoista *a* ja *b.* Mitkä kaavat saat kuvioista pinta-aloja esittäville tuloille $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ja $(a+b)(a-b)$?



RATKAISUOHJEITA JA VASTAUKSIA

1.4. (Amanda) Merkitse $x = 12.3333\ldots$. Koska desimaaliesityksen jakson pituus on 1, niin laske erotus $10^1 \cdot x - x$ mieluiten allekkain

$$\begin{array}{r} 10^1 \cdot x = 123.3333\ldots \\ x = \ \ 12.3333\ldots \\ \hline 9x = 111 \end{array} \quad \Big| \text{ Huomaa, että "hännät" osuvat kohdakkain!}$$

josta saadaan $\underline{\underline{x = 111/9}}$, mitä voisi halutessaan vielä supistaa kolmosella.

Koska luvun $y = 45.6789898989\ldots$ jakson pituus on kaksi, niin erotuksessa

$10^2 \cdot y - y = 4522.22$ taas ”hännät” kumoutuvat, joten $y = {}^{100)}\dfrac{4522.22}{99} = \underline{\underline{\dfrac{452222}{9900}}}$,

mitä voisi halutessaan vielä supistaa.

11.2. (Anna) Osamäärän aste on

$$\text{jaettavan aste} - \text{jakajan aste} = 7 - 3 = 4,$$

joten osamäärä on muotoa $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, missä $A \neq 0$ ja muut kertoimet voivat olla mitä lukuja tahansa, myös nollia.
Mahdollisen jakojäännöksen aste on pienempi kuin jakajan aste 3 ts. jakojäännös on muotoa $Fx^2 + Gx + H$, missä kertoimet voivat olla mitä tahansa lukuja.

13.5. (Arto) Tehtävän ratkaisun voi suorittaa monessa eri järjestyksessä, seuraavassa on yksi mahdollinen. Löydätkö lyhyemmän ratkaisun? Oikea vastaus on tietenkin tärkeintä.

$$\begin{array}{rl} \dfrac{c}{d-T} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} & \Big| \text{ Kerro nimittäjien tulolla } ab(d-T) \\ abc + b(d-T) = a(d-T) & \Big| \text{ Kerro auki} \\ abc + bd - bT = ad - aT & \Big| \text{ Siirrä } T\text{-termit vasemmalle, muut oikealle} \\ -bT + aT = ad - abc - bd & \Big| \text{ Ota } T \text{ tekijäksi, vaihda termien järjestystä} \\ (a-b)T = ad - bd - abc & \Big| \text{ Jaa kertoimella } a-b \\ T = \underline{\underline{\dfrac{ad - bd - abc}{a-b}}} & \end{array}$$

9.5. (Doris) a) $0.072\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 0.072 \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{1000}}\ \text{m}}{\underset{3.6}{\cancel{3600}}\ \text{s}} = 0.072 \cdot \dfrac{1000\,\text{mm}}{3.6\,s} = \dfrac{72\,\text{mm}}{3.6\,\text{s}} = \underline{\underline{20\,\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}}}.$

b) $45\,\dfrac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 45\,\dfrac{10^{-6}\ \overbrace{\text{m}}^{=10^{-3}\text{km}}}{\left(\dfrac{\text{h}}{3600}\right)^2} = 45 \cdot 10^{-9} \cdot 3600^2\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2} = 0.5832\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2} \approx 0.58\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}.$

(Kohdan b kiihtyvyyden pienestä arvosta saa havainnollisen käsityksen ajattelemalla, että kappaleen nopeus kasvaa tunnissa määrällä 0.58 km/h. Toisin sanoen: jos kappale nyt kulkisi esimerkiksi nopeudella 5 km/h, niin kymmenessä tunnissa sen nopeus kasvaisi määrällä 10 kertaa 0.58 km/h eli kappale kulkisi kymmenen tunnin kuluttua nopeudella (5+5.8) km/h = 10.8 km/h. Kymmenessä tunnissa siis reipas kävelyvauhti kiihtyisi hölkkänopeuteen.)

c) Koska $1\text{ vrk} = 24\text{ h} = 24\cdot 3600\ s = 86400\text{ s}$, niin $1\text{ s} = \dfrac{1\text{ vrk}}{86400}$ ja edelleen

$$8\,\frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 8\cdot\frac{(0.01\,\text{m})^3}{\frac{1\text{ vrk}}{86400}} = 8\cdot 86400\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{m}^3}{\text{vrk}} = 0.6912\,\frac{\text{m}^3}{\text{vrk}} \approx 0.7\,\frac{\text{m}^3}{\text{vrk}}\ .$$

Jos hanasta vuotaa sekunnissa kahdeksan kuutiosenttimetriä (eli suunnilleen piripintainen ruokalusikallinen) vettä, niin vuorokaudessa vettä vuotaa vajaa kuutiometri.

13.3. (Eemil) Vinkki: **Muista tulon nollasääntö**:

Tulo on nolla $\Leftrightarrow$ ainakin yksi tekijöistä on nolla.

a) $\underline{\underline{x = -\frac{1}{5} \text{ tai } x = \frac{5}{6}}}$ b) $\underline{\underline{x = \frac{2}{3} \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = -\frac{4}{3}}}$ | Tarvitaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa

c) $x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } (x^2-9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x^2 = 9 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = \pm 3}}$

2.1. (Eino) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$

Huomaa, että $\sqrt{13^2 - 12^2}$ **EI OLE** $\sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1$

Huomaa kirjoittaa laskimeen sulut: $\sqrt{\ }(13\,\hat{}\,2 - 12\,\hat{}\,2)$

4.1. (Elias) $18/3\cdot 2 - \underline{(5-3)}\cdot 2^2 = 18/3\cdot 2 - 2\cdot\underline{2^2} = \underline{18/3}\cdot 2 - 2\cdot 4 = \underline{6\cdot 2} - 2\cdot 4 = 12 - \underline{2\cdot 4} = \underline{12-8} = 4$

9.3. (Elli) Muista kirjoittaa (tai ainakin ajatella) kerrannaisyksikkö sulkeisiin potenssia laskettaessa, sillä etuliitteen lukuarvokin pitää korottaa potenssiin.

a) $3.2\cdot 10^{23}\,\mu\text{m}^3 = 3.2\cdot 10^{23}\,(\mu\text{m})^3 = 3.2\cdot 10^{23}\,(10^{-6}\text{m})^3 = 3.2\cdot 10^{23}\cdot 10^{-18}\text{m}^3 = \underline{\underline{3.2\cdot 10^5\,\text{m}^3}}$

b) $4.3\cdot 10^{-14}\,\text{m}^2 = 4.3\cdot 10^{-14}\cdot\underbrace{(10^9\,\text{nm})}_{=1\text{m}}{}^2 = 4.3\cdot 10^{-14}\cdot 10^{18}\cdot(\text{nm})^2 = \underline{\underline{43000\,\text{nm}^2}}$

c) $5.4\cdot 10^{37}\,\text{mm}^3 = 5.4\cdot 10^{37}\,(\text{mm})^3 = 5.4\cdot 10^{37}\cdot(10^{-3}\text{m})^3$

$$= 5.4\cdot 10^{37}\cdot 10^{-9}\underbrace{\left(\frac{\text{Mm}}{10^6}\right)}_{=1\text{m}}{}^3 = 5.4\cdot 10^{37-9-3\cdot 6}(\text{Mm})^3 = \underline{\underline{5.4\cdot 10^{10}\,\text{Mm}^3}}$$

d) $7.6\cdot 10^{-33}\,\text{km}^4 = 7.6\cdot 10^{-33}\cdot(10^3\cdot\text{m})^4 = 7.6\cdot 10^{-33}\cdot(10^3\cdot 10^6\mu\text{m})^4$

$$= 7.6\cdot 10^{-33}\cdot 10^{4\cdot 9}\cdot(\mu\text{m})^4 = \underline{\underline{7600\,\mu\text{m}^4}}$$

e) $8.7\cdot 10^{50}\underbrace{(\text{mm})^5}_{=(\frac{\text{m}}{10^3})^5} = 8.7\cdot 10^{50-5\cdot 3}\underbrace{\text{m}^5}_{=\left(\frac{\text{Mm}}{10^6}\right)^5} = 8.7\cdot 10^{35-5\cdot 6}\,(\text{Mm})^5 = \underline{\underline{870000\,\text{Mm}^5}}$

11.3. (Frans) Koska jakolaskuun $\dfrac{2x^5+3x^4+8x^3+8x^2+12x+5}{2x^2+3x+4}$ liittyvän

$$\text{osamäärän aste} = \text{jaettavan aste} - \text{jakajan aste} = 5-2 = 3\,,$$

niin osamäärä on jompikumpi kahdesta kolmannen asteen polynomivaihtoehdosta x^3+2x+1 ja $2x^3+2x+1$. Jakokulmassa suoritettava jakolasku aloitetaan tutkimalla, montako kertaa jakajan korkein termi $2x^2$ sisältyy jaettavan korkeimpaan termiin $2x^5$. Osamäärän 1. termi on näiden osamäärä eli x^3. Ainoa vaihtoehto osamääräksi on siis x^3+2x+1.

Koska jakojäännöksen aste on pienempi kuin jakajan aste 2, niin jakojäännös on enintään ensimmäistä astetta. Ainoa jakojäännökseksi sopiva lauseke on siis $x+1$.

15.6. (Hannu) Merkitse esimerkiksi: Appelsiinien kilohinta olkoon *x* €, omenien *y* €. Kahden tuntemattoman määrittämiseen tarvittavat kaksi yhtälöä saat ehdoista

$$\boxed{\begin{cases}\text{1.5 kg appelsiineja ja 2.1 kg omenia maksaa 7.32 €}\\ \text{2.3 kg appelsiineja ja 1.9 kg omenia maksaa 8.32 €}\end{cases}}$$

Kirjoita yhtälöt ja käsin laskiessasi ratkaise *x* ylemmästä yhtälöstä *y*:n lausekkeena, sillä näin saat mukavamman lausekkeen kuin muilla mahdollisilla aloituksilla. Sijoita saamasi *x*:n lauseke alempaan yhtälöön, jolloin saat *y*:n arvon. Laske lopuksi *x*.

Vastaus: Appelsiinien kilohinta on 1.80 €, omenien 2.20 €.

1.2. (Helena) Vieressä on malliksi suoritettu jakolasku 789/111. Kokonaisten jakamisen jälkeen jakojäännökseksi jäi 12 yksikköä. Kolmen nolladesimaalin jakoon pudottamisen jälkeen jäi uudelleen jakojäännös 12 tuhannesosaa. Koska jakoon pudotettavat numerot ovat jatkossa aina nollia, niin taas kolmen numeron pudottamisen jälkeen jakojäännökseksi jää 12 miljoonasosaa. On selvää, että katkoviivoin kehystetty kolmen pudotetun nolladesimaalin lenkki tulee jatkuvasti toistumaan samanlaisena äärettömän monta kertaa tuottaen aina osamäärään samat numeromerkit 108.

```
        0 0 7.1 0 8 1 0 8 1 0 8
1 1 1 | 7 8 9.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        7 7 7
          1 2 0
          1 1 1
              9 0 0
              8 8 8
                1 2 0
                1 1 1
                    9 0 0
                    8 8 8
                      1 2 0
                      1 1 1
                          9 0 0
                          8 8 8
                            1 2 0
```

7.3. (Heli) $\underset{\text{Piste siirtyy 8 suuruusluokkaa}}{-321\,000\,000} = -3.21\cdot 10^{8}$, $\underset{\text{Piste siirtyy 6 suuruusluokkaa}}{0.\,000\,005\,67} = 5.67\cdot 10^{-6}$

$\underset{\text{Piste siirtyy 68 suuruusluokkaa}}{0.\underbrace{000\ldots000}_{\text{67 nollaa}}890} = 8.9\cdot 10^{-68}$, $\underset{\text{Piste siirtyy 69 suuruusluokkaa}}{345\underbrace{000\ldots000}_{\text{67 nollaa}}} = 3.45\cdot 10^{69}$

4.3. (Hellen) $\dfrac{24}{6+2}=\underline{\underline{24/(6+2)=3}}$, $\dfrac{30+20}{10-5}=\underline{\underline{(30+20)/(10-5)=10}}$

$2^{3+1}=\underline{\underline{2\text{^}(3+1)=16}}$, $\sqrt{13^2-5^2}=\underline{\underline{\sqrt{\ }(13\text{^}2-5\text{^}2)=12}}$

$\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\underline{\underline{\sqrt{\ }(2\text{^}2+4\text{^}2+4\text{^}2)=6}}$

9.2. (Hilkka) $2.3\cdot10^{-11}\,\text{m}=23\cdot10^{-12}\,\text{m}=23\text{pm}$

$3.4\cdot10^{-10}\,\text{m}=\begin{cases}340\cdot10^{-12}\,\text{m}=\underline{\underline{340\,\text{pm}}}\\0.34\cdot10^{-9}\,\text{m}=\underline{\underline{0.34\,\text{nm}}}\end{cases}$, $4.5\cdot10^{-6}\,\text{m}=\underline{\underline{4.5\,\mu\text{m}}}$

$5.6\cdot10^{-4}\,\text{m}=\begin{cases}560\cdot10^{-6}\,\text{m}=\underline{\underline{560\,\mu\text{m}}}\\0.56\cdot10^{-3}\,\text{m}=\underline{\underline{0.56\,\text{mm}}}\end{cases}$, $6.7\cdot10^{2}\,\text{m}=\begin{cases}\underline{\underline{670\,\text{m}}}\\0.67\cdot10^{3}\,\text{m}=\underline{\underline{0.67\,\text{km}}}\end{cases}$

$7.8\cdot10^{5}\,\text{m}=\begin{cases}780\cdot10^{3}\,\text{m}=\underline{\underline{780\,\text{km}}}\\0.78\cdot10^{6}\,\text{m}=\underline{\underline{0.78\,\text{Mm}}}\end{cases}$, $8.9\cdot10^{7}\,\text{m}=89\cdot10^{6}\,\text{m}=\underline{\underline{89\,\text{Mm}}}$

$9.1\cdot10^{9}\,\text{m}=\underline{\underline{9.1\text{Gm}}}$, $2.3\cdot10^{11}\,\text{m}=\begin{cases}230\cdot10^{9}\,\text{m}=\underline{\underline{230\,\text{Gm}}}\\0.23\cdot10^{12}\,\text{m}=\underline{\underline{0.23\,\text{Tm}}}\end{cases}$

9.6. (Iida) $12\dfrac{\text{ltr}}{\text{km}}=12\dfrac{\text{dm}^3}{\underbrace{\text{km}}_{=1000\text{m}}}=\dfrac{12\cdot(\text{dm})^3}{1000\ \underbrace{\text{m}}_{=1000\text{mm}}}=\dfrac{12\cdot(100\ \text{mm})^3}{1000\cdot1000\ \text{mm}}=\underline{\underline{12\ \text{mm}^2}}$

Vastaus kuvaa sen polttoainevanan poikkipinta-alaa, jonka lentokone jättää jälkeensä taivaalle (tosin enemmän tilaa vaativina pääosin kaasumaisina päästöinä).

7.1. (Impi) $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$, $5^0\overset{\text{Määritelmän mukaan}}{=}1$, $0^5=0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0=0$, $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{5\cdot5}=\dfrac{1}{25}$

$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\underline{\underline{\dfrac{1}{1000}}}$, $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=\underline{\underline{-8}}$, $-(2^3)=-(2\cdot2\cdot2)=\underline{\underline{-8}}$

$(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=\dfrac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}=\dfrac{1}{-8}=\underline{\underline{-\dfrac{1}{8}}}$, $-(2^{-3})=-\left(\dfrac{1}{2^3}\right)=\underline{\underline{-\dfrac{1}{8}}}$

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\underline{\underline{-\dfrac{1}{8}}}$, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{8}}=\underline{\underline{-8}}$

$(-1)^{\overbrace{2012}^{\text{Parillinen}}}=\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}\cdot\ \ldots\ \cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}=\underline{\underline{1}}$, $(-1)^{\overbrace{2013}^{\text{Pariton}}}=\underbrace{(-1)^{2012}}_{=1}\cdot(-1)^1\overset{\text{Edeltä}}{=}1\cdot(-1)=\underline{\underline{-1}}$

6.2. (Irma) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(1a^2+2ab+1b^2)$

$$=\underbrace{1a^3+2a^2b+1ab^2}_{\text{Saatu } a\text{:lla kertomalla}}+\underbrace{1a^2b+2ab^2+1b^3}_{\text{Saatu } b\text{:llä kertomalla}}$$

Yhdistetään samanmuotoiset termit siten, että ensin otetaan *b*:llä kerrotun termin kerroin

$$=1a^3+(1+2)a^2b+(2+1)ab^2+1b^3=1a^3+\underbrace{3a^2b+3ab^2}_{\text{Kaikkia mahdollisia sekatuloja } a^kb^l\text{, missä } k+l=3}+1b^3$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{4} & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Pascalin kolmiossa jokainen alempi luku on vinosti yläpuolellaan olevin 1 – 2 luvun summa. Esimerkiksi kehystetty 4 on 1+3 ja kehystetty ykkönen on 1 + ei mitään.

$$(a+b)^7=1a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+1b^7$$

$$(a+b)^8=1a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+1b^8$$

1.1. (Jarmo) $\dfrac{32}{25}\overset{2^2)}{=}\dfrac{32}{5^2}=\dfrac{128}{100}=1.28$, $\quad \overset{5^2)}{}\dfrac{10101}{2^3\cdot 5}=\dfrac{25\cdot 10101}{1000}=\dfrac{252525}{1000}=252.525$

$$\overset{2^2)}{}\frac{111}{2^3\cdot 5^5}=\frac{4\cdot 111}{100000}=0.00444$$

2.2. (Juha) $\sqrt{21^2+13^2}=\sqrt{441+169}=\sqrt{610}$, mikä on välillä 24 ... 25

$\sqrt{21^2-13^2}=\sqrt{441-169}=\sqrt{272}$, mikä on välillä 16 ... 17

$\sqrt{21^2\cdot 13^2}=\sqrt{21^2}\cdot\sqrt{13^2}=21\cdot 13=273$

$$\sqrt{\frac{21^2}{13^2}}=\frac{\sqrt{21^2}}{\sqrt{13^3}}=\frac{21}{13}$$

Huomaa, että summan ja erotuksen neliöjuuren laskemiseen ei ole samanlaisia kaavoja kuin on tulon ja osamäärän neliöjuuren laskemiseen. Sama koskee kuutiojuurtakin.

$\sqrt[3]{21^3+13^3}=\sqrt[3]{9261+2197}=\sqrt[3]{11458}$, mikä on välillä 22 ... 23

$\sqrt[3]{21^3-13^3}=\sqrt[3]{9261-2197}=\sqrt[3]{7064}$, mikä on välillä 19 ... 20

$\sqrt[3]{21^3\cdot 13^3}=\sqrt[3]{21^3}\cdot\sqrt[3]{13^3}=21\cdot 13=273$, $\quad \sqrt[3]{\dfrac{21^3}{13^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{21^3}}{\sqrt[3]{13^3}}=\dfrac{21}{13}$

4.2. (Juhani) a) $12-\underline{24/3}\cdot 2+2=12-\underline{8\cdot 2}+2=\underline{12-16}+2=\underline{-4+2}=-2$

b) $12-24/(\underline{3\cdot 2}+2)=12-24/(\underline{6+2})=12-\underline{24/8}=\underline{12-3}=9$

c) $(\underline{12-24})/3\cdot 2+2=\underline{-12/3}\cdot 2+2=\underline{-4\cdot 2}+2=\underline{-8+2}=-6$.

13.1. (Jukka) a) $2x^2+3x-5=0 \qquad \mid a=2,\ b=3,\ c=-5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4}=\underline{\underline{\begin{cases}1\\ -\dfrac{5}{2}\end{cases}}}$$

b) $x^2-4x+4=0 \qquad \mid a=1,\ b=-4,\ c=4$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\underline{\underline{2}}$$

c) $4x^2+x-5=0 \qquad \mid a=4,\ b=1,\ c=-5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 4\cdot(-5)}}{2\cdot 4}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-1\pm 9}{8}=\underline{\underline{\begin{cases}1\\ -\dfrac{5}{4}\end{cases}}}$$

d) $x^2-6x+10=0 \qquad \mid a=1,\ b=-6,\ c=10$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2},$$

niinpä yhtälöllä $\underline{\underline{\text{ei ole reaalisia juuria}}}$.

3.3. (Kaarlo) Koska $\dfrac{2719.653}{12.3}\approx\dfrac{2700}{12}\approx 200$, niin osamäärän kokonaisosaan tulee kolme numeroa. Viereisestä jakoalgoritmista saadaan vastauksen numeromerkit ja jako meni todella tasan, joten osamäärä on päättyvä desimaaliluku 221.11 . Jakolaskun voi tarkistaa laskemalla jakajan ja osamäärän tulon $12.3\cdot 221.11=2719.653=\text{jaettava}$, kuten pitäisikin olla.

```
      0 0 2 2 1 1 1
123  |2 7 1 9 6 5 3
      2 4 6
        2 5 9
        2 4 6
          1 3 6
          1 2 3
            1 3 5
            1 2 3
              1 2 3
              1 2 3
                  0
```

7.5. (Kalervo) $3a^3\cdot 2a^2\cdot a=6a^{3+2+1}=\underline{\underline{6a^6}}$

$$6\cdot\left(b^2\right)^3-5\cdot b^{\left(2^3\right)}=6b^{2\cdot 3}-5b^8=\underline{\underline{6b^6-5b^8}}=\overbrace{b^6(6-5b^2)}^{\text{Oikea, mutta pidempi ja yleensä vähemmän suositeltava muoto}}$$

$$\frac{c^2\cdot c^{10}}{c\cdot c^3\cdot c^5}=c^{2+10-1-3-5}=\underline{\underline{c^3}} \quad , \qquad \left(-2\cdot x\cdot y^2\cdot z^4\right)^3=\underline{\underline{-8x^3y^6z^{12}}}$$

$$\left(\frac{-2s\cdot t^2}{u^3}\right)^4=\underline{\underline{\left(\frac{2st^2}{u^3}\right)^4=\frac{16s^4t^8}{u^{12}}=16s^4t^8u^{-12}}}$$ (Kaikissa muodoissa 10 merkkiä, viivaa tms.)

7.2. (Lauri) $5.6\cdot 10^7 = \underset{\text{Piste siirtyi 7 paikkaa}}{\underrightarrow{56\,000\,000}}$, $-6.5\cdot 10^{-4} = -0.\underset{\text{4 paikkaa}}{\underleftarrow{000\,65}}$

$-0.45\cdot 10^6 = -\underset{\text{6 paikkaa}}{\underrightarrow{450\,000}}$, $345\cdot 10^{-6} = 0.\underset{\text{6 paikkaa}}{\underleftarrow{000\,345}}$

$3.21\cdot 10^{51} = \overset{\text{Piste siirtyi 51 paikkaa}}{\overrightarrow{321\underbrace{000...000}_{51-2=49\text{ nollaa}}}}$, $12.3\cdot 10^{-30} = 0.\overset{\text{Piste siirtyi 30 paikkaa}}{\overleftarrow{\underbrace{000...000}_{30-2=28\text{ nollaa}}123}}$

9.7. (Leena) $60\dfrac{\text{L}}{\text{ha}} = 60\dfrac{(\text{dm})^3}{10000\,\text{m}^2} = 60\cdot\dfrac{(0.1\text{m})^3}{10000\,\text{m}^2} = \dfrac{60\cdot 10^{-3}}{10^4}\,\text{m} = 6\cdot 10^{-6}\,\text{m} = 6\,\mu\text{m}$

Tulkinta: ohjeen mukaisessa levityksessä myrkkyliuosta levitetään 6 mikrometrin vahvuinen kerros koko myrkytettävälle alueelle.

14.1. (Leevi) a) $\underline{\underline{x=1,\ \ y=2}}$. Aloita ratkaisemalla *x* ylemmästä yhtälöstä *y*:n avulla.

Sijoita *x*:n lauseke alempaan ja ratkaise *y*, jonka arvon sijoitat *x*:lle saatuun lausekkeeseen.

b) $\begin{cases} 5x+y=7 \quad \Leftrightarrow \quad y=7-5x \text{ , sijoita alempaan} \\ 3x^2+x-y=2 \end{cases}$

$3x^2+x-7+5x=2 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x_1=1\ ,\ \ y_1=2 \\ x_2=-3\ ,\ y_2=22 \end{cases}}}$

13.2. (Liisa) Kätevämmällä tavalla:

a) $x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0 \overset{\text{Tulon nollasääntö}}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ tai } x-6=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0 \text{ tai } x=6}}$

b) $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$ c) Tulon nollasäännöllä $\underline{\underline{x=0 \text{ tai } x=-\dfrac{7}{3}}}$

d) $x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ Tämä on mahdotonta, joten $\underline{\underline{\text{yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.}}}$

3.2. (Lilja) Viereisestä jakolaskusta nähdään, että (vaillinainen) osamäärä on 3070 ja jakojäännös 21.

Tarkistus: $\text{Jakaja}\times\text{osamäärä}+\text{jakojäännös}$

$= 23\cdot 3070+21 = 70631$

$= \text{jaettava,}$

kuten pitääkin.

$$\begin{array}{r|lllll} & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 23 & 7 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ & \underline{6} & \underline{9} & & & \\ & & 1 & 6 & 3 & \\ & & \underline{1} & \underline{6} & \underline{1} & \\ & & & & 2 & 1 \end{array}$$

9.1. (Lotta) a) $5.2\,\text{Tm} = \underline{\underline{5.2\cdot 10^{12}\,\text{m}}}$, $123\,\text{pm} = \underline{\underline{123\cdot 10^{-12}\,\text{m} = 1.23\cdot 10^{-10}\,\text{m}}}$

b) $1.23\cdot 10^{-11}\,\text{Mm} = 1.23\cdot 10^{-11}\cdot 10^6\,\text{m} = 1.23\cdot 10^{-11}\cdot 10^6\cdot 10^6\,\mu\text{m} = \underline{\underline{12.3\,\mu\text{m}}}$

c) $7.2\cdot 10^{19}\,\text{nm} = 7.2\cdot 10^{19}\cdot 10^{-9}\,\text{m} = 7.2\cdot 10^{19}\cdot 10^{-9}\cdot 10^{-9}\,\text{Gm} = \underline{\underline{72\,\text{Gm}}}$

15.3. (Marjo) Merkitään $v =$ autoilijan nopeus loppumatkalla
$3s =$ koko matkan pituus

Nopeuden ratkaisemiseksi tarvittava yhtälö saadaan ehdosta

$$\boxed{\text{Koko aika} = \text{alkumatkan aika} + \text{loppumatkan aika}}$$

Koska $\text{aika} = \dfrac{\text{matka}}{\text{keskinopeus}}$, niin ilman yksiköitä saadaan

$$\frac{3s}{90} = \frac{s}{70} + \frac{2s}{v} \quad \Big| \cdot \frac{9 \cdot 7 \cdot 10 \cdot v}{s}$$

$$21v = 9v + 1260$$

$$v = 105$$

Vastaus: Loppumatka on ajettava nopeudella 105 km/m.

11.1. (Markus)

$$\begin{array}{r|l} & x^3 - 3x^2 \qquad + 2 \\ \hline x+3 & x^4 + 0x^3 - 9x^2 + 2x + 0 \\ & x^4 + 3x^3 \\ \hline & \quad -3x^3 - 9x^2 + 2x + 0 \\ & \quad -3x^3 - 9x^2 \\ \hline & \qquad\qquad 2x + 0 \\ & \qquad\qquad 2x + 6 \\ \hline & \qquad\qquad\quad -6 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 3x + 4 \\ \hline 3x-2 & 6x^3 + 5x^2 + 6x - 8 \\ & 6x^3 - 4x^2 \\ \hline & \qquad 9x^2 + 6x - 8 \\ & \qquad 9x^2 - 6x \\ \hline & \qquad\qquad 12x - 8 \\ & \qquad\qquad 12x - 8 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

a) Vasemmanpuoleisen jakolaskun mukaan osamäärä on $x^3 - 3x^2 + 2$ ja jakojäännös -6. Tarkistetaan jakolasku laskemalla

$$\text{Jakaja} \times \text{osamäärä} + \text{jakojäännös} = (x+3)(x^3 - 3x^2 + 2) + (-6)$$

$$= x^4 - 3x^3 + 2x + 3x^3 - 9x^2 + 6 - 6 = x^4 - 9x^2 + 2x = \text{jaettava}$$

kuten pitääkin.

b) Oikeanpuoleinen jako meni tasan ja osamääräksi saatiin $2x^2 + 3x + 4$. Helpolla kertolaskulla voi todeta, että nyt

$$\text{Jakaja} \times \text{osamäärä} = \text{jaettava}.$$

15.8. (Martta) Merkitään esimerkiksi

$x =$ alkuperäisen luvun satojen numero, $y =$ kymppien numero.

Tällöin ykkösten numero on $x + y$.

Tällainen luku luetaan "x sataa y kymmentä $x + y$ (ykköstä)" ja sen arvo on $x \cdot 100 + y \cdot 10 + (x + y)$.

Tarvittava yhtälöpari saadaan esimerkin ehdoista:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Jos lukuun, jonka numeromerkit ovat } x, y \text{ ja } (x+y) \text{ lisätään 495,} \\ \text{saadaan luku, jonka numeromerkit ovat } (x+y), y \text{ ja } x. \\ \text{Jos lukuun, jonka numeromerkit ovat } x, y \text{ ja } (x+y) \text{ lisätään 27,} \\ \text{saadaan luku, jonka numeromerkit ovat } x, (x+y) \text{ ja } y. \end{cases}}$$

Ottaen huomioon näiden kolminumeroisten lukujen arvot saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x\cdot 100+y\cdot 10+(x+y)+495=(x+y)\cdot 100+y\cdot 10+x \\ x\cdot 100+y\cdot 10+(x+y)+27=x\cdot 100+(x+y)\cdot 10+y \end{cases}$$

Siirtämällä tuntemattomat oikealle ja vakiot vasemmalle saadaan

$$\begin{cases} 495=99y \\ 27=9x \end{cases} \overset{\text{Jaetaan kertoimet pois}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Vastaus: Alkuperäinen luku on 358.

10.4. (Oskari) a) $\dfrac{5x+15y+35z}{5a+15b+35c}=\dfrac{\cancel{5}(x+3y+7z)}{\cancel{5}(a+3b+7c)}=\dfrac{x+3y+7z}{a+3b+7c}$

Huomaa, että vain koko osoittajan ja koko nimittäjän yhteisen tekijän voi supistaa pois. Termejä ja termien tekijöitä ei voi supistaa.

b) $\dfrac{mx+2m^2y+3m^3z}{mx+m^2y+m^3z}=\dfrac{\cancel{m}(x+2my+3m^2z)}{\cancel{m}(x+my+m^2z)}=\dfrac{x+2my+3m^2z}{x+my+m^2z}$

c) $^{a)}\dfrac{a}{5}+{}^{5)}\dfrac{5}{a}-\dfrac{1}{5a}=\dfrac{a^2+25-1}{5a}=\dfrac{a^2+24}{5a}$

d) $^{ab)}\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}=\dfrac{ab\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{ab\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)}=\dfrac{b-a}{b^2-a^2}=\dfrac{\cancel{b-a}}{(b+a)\cancel{(b-a)}}=\dfrac{1}{a+b}$

Huomaa, että miinusmerkki vaikuttaa jokaiseen sulkeitten sisällä olevaan termiin!

e) $^{m+n)}\dfrac{m+n}{m-n}-{}^{m-n)}\dfrac{m-n}{m+n}=\dfrac{(m+n)^2-(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}$

$$=\frac{\cancel{m^2}+2mn+\cancel{n^2}-(\cancel{m^2}-2mn+\cancel{n^2})}{m^2-n^2}=\frac{4mn}{m^2-n^2}$$

15.7. (Paavo) Merkitään $x =$ suorakulmion alkuperäinen pituus, $y =$ leveys

Tarvittavat yhtälöt saadaan ehdoista

$$\begin{cases} \text{Suorakulmion ala 1. muutoksen jälkeen} - \text{alkuperäinen ala} = 1113\ \text{mm}^2 \\ \text{Suorakulmion ala 2. muutoksen jälkeen} - \text{alkuperäinen ala} = -783\ \text{mm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)\cdot(y+3)-x\cdot y=1113 \\ (x+2)\cdot(y-3)-x\cdot y=-783 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x\cdot y}+3x+y+3-\cancel{x\cdot y}=1113 \Leftrightarrow y=1110-3x \ \big|\ \text{Sijoitetaan alempaan} \\ \cancel{x\cdot y}-3x+2\cdot y-6-\cancel{x\cdot y}=-783 \end{cases}$$

$$-3x+2\cdot(1110-3x)-6=-783 \Leftrightarrow -9x=-783-2220+6 \Leftrightarrow x=333$$

$$y=1110-3x=1110-3\cdot 333=111$$

Vastaus: Suorakulmion pituus on 333 mm ja leveys 111 mm.

15.4. (Paula) Merkitään: Haihdutettavan veden massa on x kg.

Koska suolaa ei haihdu veden mukana, niin yhtälö saadaan ehdosta

$\boxed{\text{Suolan massa alkuperäisessä liuoksessa} = \text{suolan massa lopullisessa liuoksessa}}$

Niinpä $\dfrac{5.5}{100}\cdot 42=\dfrac{7}{100}\cdot(42-x)$, josta $x=9$

Vastaus: Vettä on haihdutettava 9.0 kg .

7.4. (Pauli) $-321\ 000\ 000=\begin{cases}-321\cdot 10^6\\ -0.321\cdot 10^9\end{cases}$, $0.000\,005\,67=5.67\cdot 10^{-6}$

$0.\underbrace{000...000}_{\text{67 nollaa}}890=89.0\cdot 10^{-69}$, $345\underbrace{000...000}_{\text{67 nollaa}}=3.45\cdot 10^{69}$

6.1. (Pentti) a) $(t+2)(2t-1)-(t+1)^2=2t^2-t+4t-2-(t^2+2t+1)=\underline{\underline{t^2+t-3}}$

b) $(2x-y)^2+(x+2y)^2-2(x+2y)(2x+y)$

Varma mutta työläs tapa on kertoa binomin neliö auki osittelulakia käyttäen. Kaavojen $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ käyttö olisi kuitenkin hivenen lyhyempi tapa.

$=(2x-y)(2x-y)+(x+2y)(x+2y)-(2x+4y)(2x+y)$

Muista miinusmerkin vaikutus joka termiin

$=\cancel{4x^2}-\cancel{2xy}-\cancel{2xy}+y^2+x^2+\cancel{2xy}+\cancel{2xy}+\cancel{4y^2}-\cancel{4x^2}-2xy-8xy-\cancel{4y^2}$

$=\underline{\underline{x^2+y^2-10xy}}$

15.5. (Rasmus) Merkitään $\begin{cases}x= & \text{tarvittavan 3-prosenttisen liuoksen massa}\\ y= & \text{tarvittavan 12-prosenttisen liuoksen massa}\end{cases}$

Yhtälöt saadaan ehdoista

$\boxed{\begin{cases}\text{Sokeriliuoksia yhteensä 32 kg}\\ \text{Sokerin massa 3\%-liuoksessa}+\text{sokerin massa 12\%-liuoksessa}=\text{sokerin massa loppuliuoksessa}\end{cases}}$

$\begin{cases}x+y=32 \quad \Leftrightarrow \quad x=32-y & \text{, sijoita tämä alempaan sadalla kerrottuun yhtälöön}\\ \dfrac{3}{100}\cdot x+\dfrac{12}{100}\cdot y=\dfrac{5}{100}\cdot 32 \quad \Big|\cdot 100\end{cases}$

$3\cdot(32-y)+12y=160 \quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{160-96}{9}\approx 7.1 \ , \ x\approx 24.9$

Vastaus: 3-prosenttista liuosta tarvitaan 24.9 kg, 12-prosenttista 7.1 kg .

3.1. (Roope) Vieressä on suoritettu kertolasku $23.4\cdot 4.321=\underline{\underline{101.1114}}$. Desimaalipisteen paikan voi määrittää joko arvioimalla tuloa tai jättämällä vastauksessa desimaalipisteen taakse niin monta desimaalia kuin niitä on tekijöissä yhteensä eli siis $1+3=4$ desimaalia.

```
      4 3 2 1
        2 3 4
  -----------
    1 7 2 8 4   Ylärivi kerrottu nelosella
  1 2 9 6 3     Ylärivi kerrottu kolmosella
  8 6 4 2       Ylärivi kerrottu kakkosella
  -----------
1 0 1 1 1 1 4
```

1.3. (Samuel) $^{10)}54.3 = \dfrac{543}{10}$, $^{10000)}123.4567 = \dfrac{1234567}{10000}$

10.2. (Senja) Annetut luvut on ensin vaiheittain jaettu alkutekijöihinsä viereisessä kaaviossa. Jokaisesta esiintyneestä alkutekijästä on yksi sen korkeimmista esiintyneistä potensseista selvyyden vuoksi kehystetty. Lopuksi pienimpään yhteiseen jaettavaan on otettu kutakin alkutekijää niin monta kappaletta kuin niitä oli siinä luvussa, jossa niitä oli eniten.

$$240 = 10 \cdot 24 = 2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3 = \boxed{2^4} \cdot 3 \cdot \boxed{5}$$
$$360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$432 = 2 \cdot 3 \cdot 72 = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot \boxed{3^3}$$
$$\text{p.y.j.} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = \underline{\underline{2160}}$$

7.6. (Suoma)

$$\frac{(-2)^4 \cdot 8^5}{-(16^3)} = \frac{2^4 \cdot (2^3)^5}{-(2^4)^3} = -\frac{2^4 \cdot 2^{15}}{2^{12}} = -2^{4+15-12} = \underline{\underline{-2^7}}$$

$$\frac{4^{(2^3)}}{(8^2)^3} = \frac{4^8}{8^{2\cdot 3}} = \frac{(2^2)^8}{(2^3)^6} = \frac{2^{16}}{2^{18}} = 2^{16-18} = \underline{\underline{2^{-2}}}$$

$$\left(\frac{1}{1024}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^2 = (2^{-10})^2 = \underline{\underline{2^{-20}}}$$

$$\frac{36^{35}}{24^{70}} = \frac{(2^2 \cdot 3^2)^{35}}{(2^3 \cdot 3)^{70}} = \frac{2^{70} \cdot \cancel{3^{70}}}{2^{210} \cdot \cancel{3^{70}}} = \underline{\underline{2^{-140}}}$$

15.2. (Taisto) Merkitään $v = \text{auton alkuperäinen nopeus}$.

Lausutaan ajan säästö tunteina: $40\,\text{min} = 40 \cdot \dfrac{\text{h}}{60} = \dfrac{2}{3}\text{h}$ ja jätetään yksiköt pois.

Yhtälö saadaan ehdosta

$$\boxed{\text{Ajan säästö} = \text{alkuperäinen pidempi aika} - \text{uusi lyhyempi aika}\ .} \quad \left|\ \text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}\right.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{360}{v} - \frac{360}{v+18} \qquad \left|\ \cdot 3v(v+18)\right.$$

$$2v^2 + 36v = 1080v + 19440 - 1080v \qquad \left|\ :2\right.$$

$$v^2 + 18v - 9720 = 0 \qquad \left|\ \text{ratkaisukaavalla}\right.$$

$$v = \begin{cases} 90 \\ -108 \quad \text{(ei kelpaa)} \end{cases}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Auton nopeus oli 90 km/h}}}$.

15.9. (Terttu) Merkinnät: Liuosta 1 tarvitaan x kg, liuosta 2 tarvitaan y kg. Kolmen tuntemattoman ryhmän välttämiseksi lausutaan tarvittavan veden massa heti muodossa $(50 - x - y)$ kg . Laskut lasketaan kuitenkin ilman yksiköitä.

Koska lisättävässä vedessä ei ole suolaa eikä sokeria, niin tarvittavat yhtälöt saadaan ehdoista

$$\begin{cases}\text{Suolan massa liuoksessa1} + \text{suolan massa liuoksessa 2} = \text{suolan massa lopullisessa liuoksessa .}\\ \text{Sokerin massa liuoksessa1} + \text{sokerin massa liuoksessa 2} = \text{sokerin massa lopullisessa liuoksessa .}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{100}\cdot x+\frac{10}{100}\cdot y=\frac{2}{100}\cdot 50 \quad | \cdot 100\\ \frac{20}{100}\cdot x+\frac{1}{100}\cdot y=\frac{5}{100}\cdot 50 \quad | \cdot 100\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+10y=100\\ 20x+y=250 \quad \Leftrightarrow \quad y=250-20x \text{ , sijoitetaan ylempään}\end{cases}$$

$$3x+10(250-20x)=100 \quad \Leftrightarrow \quad -197x=-2400 \quad \Leftrightarrow \quad x=12.1827$$

$$y=250-20x=6.3452$$

Vastaus: Liuosta 1 tarvitaan 12.2 kg, liuosta 2 tarvitaan 6.3 kg ja vettä 31.5 kg .

10.3. (Tiina) a) $\overset{12)}{\frac{2}{5}}-\overset{10)}{\frac{5}{6}}+\overset{5)}{\frac{5}{12}}=\frac{24}{60}-\frac{50}{60}+\frac{25}{60}=\frac{24-50+25}{60}=-\frac{1}{60}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1\cdot 2\cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 5\cdot 7}=\frac{4}{35}$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{6}{5}:\frac{2}{3}=\overset{5)}{\frac{5}{8}}-\overset{4)}{\frac{6}{5}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{25}{40}-\frac{72}{40}=-\frac{47}{40}$

d) $\frac{3\cdot 5+11\cdot 5}{3\cdot 7+11\cdot 4}=\frac{15+55}{21+44}=\frac{70}{65}^{(5}=\frac{14}{13}$ | HUOMAA, että alkuperäistä murtolauseketta ei saa supistaa termien tekijöillä 3 ja 11

e) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5}=\frac{9}{10}$

TAI TOISIN laventamalla pikkunimitäjien 4 ja 6 (tulolla tai) p.y.j:llä

$\overset{12)}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}=\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{12}}\cdot\frac{5}{\cancel{6}}}=\frac{9}{10}$

f) $\frac{6}{\frac{3}{5}}=\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}=10$

TAI TOISIN laventamalla pikkunimittäjällä

$\overset{5)}{\frac{6}{\frac{3}{5}}}=\frac{5\cdot 6}{\cancel{5}\cdot\frac{3}{\cancel{5}}}=\frac{5\cdot\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{3}}=10$

g) $\frac{\frac{4}{5}}{8}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5\cdot\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1}{10}$

TAI TOISIN laventamalla pikkunimittäjällä

$\overset{5)}{\frac{\frac{4}{5}}{8}}=\frac{\cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}}{5\cdot 8}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5\cdot\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1}{10}$

h) Lavennetaan tämäkin murtolauseke pikkunimittäjien 4, 6, 3 ja 5 tulolla tai pelkästään pikkunimittäjien pienimmällä yhteisellä jaettavalla eli 60:llä

$$\overset{60)}{\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}+\frac{6}{5}}}=\frac{60\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{60\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{5}\right)}\overset{\text{Käytä osittelulakia}}{=}\frac{45-50}{80+72}=-\frac{5}{152}$$

12.1. (Toivo) a) $-2(x+1)-5=6-3(2-4x)$ | Kerro auki

$-2x-2-5=\cancel{6}-\cancel{6}+12x$ | Siirrä x:t vasemmalle, vakiot oikealle

$-2x-12x=2+5$

$-14x=7$ | $:(-14)$

$$x=\frac{7}{-14}=-\frac{1}{2}$$

b) Täsmälleen edellisen tehtävän ohjein

$m\cdot(x+a)=n\cdot(x+b)$

$mx+ma=nx+nb$

$mx-nx=nb-ma$

$(m-n)x=nb-ma$ | Koska oletuksen $m\neq n$ mukaan $m-n\neq 0$, niin yhtälö voidaan jakaa $(m-n)$:llä

$$x=\frac{nb-ma}{m-n}=-\frac{ma-nb}{m-n}$$ | On makuasia, kumpi vastaus on parempi: edellinen on lyhyempi, jälkimmäinen aakkosjärjestyksessä ja symmetrisempi

13.4. (Tuomo) a) $\frac{8}{x+3}=\frac{3}{x+2}+1$ | $\cdot(x+3)(x+2)$, oltava $x\neq-3$ ja $x\neq-2$.

$\cancel{8x}+16=\cancel{3x}+9+x^2+\cancel{2x}+\cancel{3x}+6$ | Siirretään vakiot vasemmalle

$1=x^2 \Leftrightarrow x=\pm1$ | Juuret kelpaavat. Vastaus: $x=\pm1$

b) $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+4}{x\cdot(x-4)}$ | $\cdot x(x-4)$ Oltava $x\neq0$ ja $x\neq4$

$x^2-2x=x+4$

$x^2-3x-4=0 \overset{\text{Ratkaisukaavalla}}{\Leftrightarrow} x=\begin{cases}4\text{, ei kelpaa}\\-1\end{cases}$ Vastaus: $x=-1$

9.4. (Ulla) Sopivan esityksen keksimiseksi sinun kannattaa ensin lausua seuraavat yksiköt perusyksikön metri avulla:

$1\,\text{pm}=10^{-12}\,\text{m}$	$1\,\text{pm}^2=10^{-24}\,\text{m}^2$	$\boxed{1\,\text{pm}^3=10^{-36}\,\text{m}^3}$	$1\,\text{pm}^4=10^{-48}\,\text{m}^4$
$\boxed{1\,\text{nm}=10^{-9}\,\text{m}}$	$1\,\text{nm}^2=10^{-18}\,\text{m}^2$	$\boxed{1\,\text{nm}^3=10^{-27}\,\text{m}^3}$	$1\,\text{nm}^4=10^{-36}\,\text{m}^4$
$\boxed{1\,\mu\text{m}=10^{-6}\,\text{m}}$	$1\,\mu\text{m}^2=10^{-12}\,\text{m}^2$	$1\,\mu\text{m}^3=10^{-18}\,\text{m}^3$	$1\,\mu\text{m}^4=10^{-24}\,\text{m}^4$
$1\,\text{mm}=10^{-3}\,\text{m}$	$1\,\text{mm}^2=10^{-6}\,\text{m}^2$	$1\,\text{mm}^3=10^{-9}\,\text{m}^3$	$1\,\text{mm}^4=10^{-12}\,\text{m}^4$
$1\,\text{km}=10^{3}\,\text{m}$	$1\,\text{km}^2=10^{6}\,\text{m}^2$	$1\,\text{km}^3=10^{9}\,\text{m}^3$	$1\,\text{km}^4=10^{12}\,\text{m}^4$
$1\,\text{Mm}=10^{6}\,\text{m}$	$\boxed{1\,\text{Mm}^2=10^{12}\,\text{m}^2}$	$1\,\text{Mm}^3=10^{18}\,\text{m}^3$	$1\,\text{Mm}^4=10^{24}\,\text{m}^4$
$1\,\text{Gm}=10^{9}\,\text{m}$	$\boxed{1\,\text{Gm}^2=10^{18}\,\text{m}^2}$	$1\,\text{Gm}^3=10^{27}\,\text{m}^3$	$\boxed{1\,\text{Gm}^4=10^{36}\,\text{m}^4}$
$1\,\text{Tm}=10^{12}\,\text{m}$	$1\,\text{Tm}^2=10^{24}\,\text{m}^2$	$1\,\text{Tm}^3=10^{36}\,\text{m}^3$	$\boxed{1\,\text{Tm}^4=10^{48}\,\text{m}^4}$

Jokaisen esimerkin kohdalla on kaksi lähinnä olevaa kerrannaisyksikköä aidattu ja näistä on sitten valittu se, jonka kertoimeksi tulee ykköstä suurempi luku.

$$1.23\cdot 10^{-7}\,\text{m} = \begin{cases} 123\cdot 10^{-9}\,\text{m} = \underline{\underline{123\,\text{nm}}} \\ 0.123\cdot 10^{-6}\,\text{m} = 0.123\,\mu\text{m}\text{ , kerroin liian pieni} \end{cases}$$

$$2.34\cdot 10^{17}\,\text{m}^2 = \begin{cases} 234000\cdot 10^{12}\,\text{m}^2 = 234000\cdot\left(10^{6}\,\text{m}\right)^2 = \underline{\underline{234000\,\text{Mm}^2}} \\ 0.234\cdot 10^{18}\,\text{m}^2 = 0.234\cdot\left(10^{9}\,\text{m}\right)^2 = 0.234\,\text{Gm}^2\text{, kerroin liian pieni} \end{cases}$$

$$3.45\cdot 10^{-30}\,\text{m}^3 = \begin{cases} 3450000\cdot 10^{-36}\,\text{m}^3 = 3450000\cdot\left(10^{-12}\,\text{m}\right)^3 = \underline{\underline{3450000\,\text{pm}^3}} \\ 0.00345\cdot 10^{-27}\,\text{m}^3 = 0.00345\cdot\left(10^{-9}\,\text{m}\right)^3 = 0.00345\,\text{nm}^3\text{, kerroin liian pieni} \end{cases}$$

$$4.56\cdot 10^{46}\,\text{m}^4 = \begin{cases} 45600000000\cdot 10^{36}\,\text{m}^4 = 45600000000\cdot\left(10^{9}\,\text{m}\right)^4 = \underline{\underline{45600000000\,\text{Gm}^4}} \\ 0.0456\cdot 10^{48}\,\text{m}^4 = 0.0456\cdot\left(10^{12}\,\text{m}\right)^4 = 0.0456\,\text{Tm}^4\text{, kerroin liian pieni} \end{cases}$$

15.1. (Unto) Merkitään $x = \text{harjoittelijan alkupalkka}$. Yhtälö saadaan ehdosta

$$\boxed{\text{Alkupalkka} + \text{korotus} = \text{korotuksen jälkeinen palkka}}$$

$x + \dfrac{12}{100}\cdot x = 1382.08\text{ €} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1382.08\text{ €}}{1.12} = 1234\text{ €}$ Vastaus: Alkupalkka oli 1234 €.

8.1. (Veikko) a) Tämä kohta onnistunee useimmilla laskimilla, **kunhan vain huomaat lukea laskimen antaman vastauksen aina loppuun asti** ja muistat laskimen tulosteessa käyttämän **merkinnän xEn tarkoittavan lukua $x\cdot 10^n$.**
Kun tarkasteltavissa lausekkeissa kymppien eksponentit ovat samat, niin käsinlaskujen helppous/vaikeus riippuu siitä, miten mukavia/hankalia kymppien potenssien kertoimet ovat. Tässä esimerkissä kyseiset kertoimet 4 ja 2 ovat mukavia jakolaskunkin kannalta ja kerroin 4 on mukava neliöjuuren laskemisen kannalta.

$$4\cdot 10^{32} + 2\cdot 10^{32} = (4+2)\cdot 10^{32} = \underline{\underline{6\cdot 10^{32}}} \quad , \quad 4\cdot 10^{32} - 2\cdot 10^{32} = (4-2)\cdot 10^{32} = \underline{\underline{2\cdot 10^{32}}}$$

$$(4\cdot 10^{32})\cdot(2\cdot 10^{32}) \overset{\substack{\text{Kertolaskun vaihdanta-} \\ \text{ja liitäntälait}}}{=} (4\cdot 2)\cdot(10^{32}\cdot 10^{32}) = \underline{\underline{8\cdot 10^{64}}} \quad , \quad \frac{4\cdot \cancel{10^{32}}}{2\cdot \cancel{10^{32}}} = \underline{\underline{2}}$$

$$\sqrt{4\cdot 10^{32}} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{10^{32}} = \underline{\underline{2\cdot 10^{16}}} \text{ (sillä } \left(10^{16}\right)^2 = 10^{32}\text{)}$$

b) Tämäkin kohta onnistuu useimmilla laskimilla ja kertoimet ovat jälleen mukavat käsinlaskujenkin kannalta:

$$4\cdot 10^{-32} + 2\cdot 10^{-30} = (4\cdot 10^{-2} + 2)\cdot 10^{-30} = \underline{\underline{2.04\cdot 10^{-30}}}$$

$$4\cdot 10^{-32} - 2\cdot 10^{-30} = (4\cdot 10^{-2} - 2)\cdot 10^{-30} = \underline{\underline{-1.96\cdot 10^{-30}}}$$

$$(4\cdot 10^{-32})\cdot(2\cdot 10^{-30}) = (4\cdot 2)\cdot(10^{-32}\cdot 10^{-30}) = \underline{\underline{8\cdot 10^{-62}}} \quad , \quad \frac{4\cdot 10^{-32}}{2\cdot 10^{-30}} = \frac{4}{2}\cdot 10^{-32-(-30)} = \underline{\underline{2\cdot 10^{-2}}}$$

$$\sqrt{4\cdot 10^{-32}} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{10^{-32}} = \underline{\underline{2\cdot 10^{-16}}}$$

c) Useimmat laskimet joutuvat tyytymään tässä kohdassa likiarvovastaukseen summaa ja erotusta laskiessaan, mutta se ei ainakaan käytännön laskuissa haitanne kuten seuraavista käsinlaskuista näemme.

$$4\cdot 10^{45}+2\cdot 10^{23}=\left(4+2\cdot 10^{-22}\right)\cdot 10^{45}=\underline{\underline{4.\overbrace{000\cdots000}^{21\text{ nollaa}}2\cdot 10^{45}\approx 4\cdot 10^{45}}}$$

Tämän vastauksen voisi kirjoittaa ilman välivaiheitakin, koska summan termit ovat aivan eri suuruusluokkaa: vaikka jälkimmäinenkin termi on valtavan suuri, niin se on kuitenkin mitättömän pieni edellisen termin rinnalla. Siksi summan arvo riippuu käytännössä vain edellisestä termistä.

$$4\cdot 10^{45}-2\cdot 10^{23}=\left(4-2\cdot 10^{-22}\right)\cdot 10^{45}=\underline{\underline{3.\overbrace{999\cdots999}^{21\text{ yhdeksikköä}}8\cdot 10^{45}\approx 4\cdot 10^{45}}}$$

$$\left(4\cdot 10^{45}\right)\cdot\left(2\cdot 10^{23}\right)=(4\cdot 2)\cdot\left(10^{45}\cdot 10^{23}\right)=\underline{\underline{8\cdot 10^{68}}}\quad,\quad \frac{4\cdot 10^{45}}{2\cdot 10^{23}}=\underline{\underline{2\cdot 10^{22}}}$$

$$\sqrt{4\cdot 10^{45}}=\sqrt{40\cdot 10^{44}}=\sqrt{40}\cdot\sqrt{10^{44}}$$

$$\approx\begin{cases}\underline{\underline{6\cdot 10^{22}}}\text{, missä kerroin on karkeasti arvioitu}\\ \underline{\underline{6.3246\cdot 10^{22}}}\text{, missä kerroin oli laskettavissa yksinkertaisella laskimella}\end{cases}$$

d) Nyt luvut ovat niin suuria, että tavalliset laskimet eivät niitä käsittele. Kertoimet ovat toisaalta niin helpot, että kaikki laskut ovat päässälaskuja tässä osiossa.

$$4\cdot 10^{1234}+2\cdot 10^{1237}=(0.004+2)\cdot 10^{1237}=\underline{\underline{2.004\cdot 10^{1237}}}$$

$$4\cdot 10^{1234}-2\cdot 10^{1237}=(0.004-2)\cdot 10^{1237}=\underline{\underline{-1.996\cdot 10^{1237}}}$$

$$(4\cdot 10^{1234})\cdot(2\cdot 10^{1237})=(4\cdot 2)\cdot(10^{1234}\cdot 10^{1237})=\underline{\underline{8\cdot 10^{2471}}}$$

$$\frac{4\cdot 10^{1234}}{2\cdot 10^{1237}}=\underline{\underline{2\cdot 10^{-3}=0.002}}\quad,\quad \sqrt{4\cdot 10^{1234}}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{10^{1234}}=\underline{\underline{2\cdot 10^{617}}}$$

e) Nyt yksinkertaisesta nelilaskimestakin on apua erityisesti kolmen viimeisen lausekkeen laskemisessa

$$4.567\cdot 10^{1234}+1.111\cdot 10^{1232}=(4.567+0.01111)\cdot 10^{1234}=4.57811\cdot 10^{1234}\approx\underline{\underline{4.578\cdot 10^{1234}}}$$

$$4.567\cdot 10^{1234}-1.111\cdot 10^{1232}=(4.567-0.01111)\cdot 10^{1234}=4.55589\cdot 10^{1234}\approx\underline{\underline{4.556\cdot 10^{1234}}}$$

$$(4.567\cdot 10^{1234})\cdot(1.111\cdot 10^{1232})=(\underbrace{4.567\cdot 1.111}_{\text{Laskimella}})\cdot(10^{1234}\cdot 10^{1232})\approx\underline{\underline{5.074\cdot 10^{2466}}}$$

$$\frac{4.567\cdot 10^{1234}}{1.111\cdot 10^{1232}}=\overbrace{\frac{4.567}{1.111}}^{\text{Laskimella}}\cdot 10^{1234-1232}\approx 4.111\cdot 10^{2}=\underline{\underline{411.1}}$$

$$\sqrt{4.567\cdot 10^{1234}}=\overbrace{\sqrt{4.567}}^{\text{Laskimella}}\cdot\sqrt{10^{1234}}\approx\underline{\underline{2.137\cdot 10^{617}}}$$

f) Osa seuraavista laskuista on ilmiselviä ja osassa voi hyödyntää laskinta, vaikka tavallisilla laskimilla laskuja ei voi kokonaan suorittaa.

$$4.567\cdot10^{5432}+1.111\cdot10^{4321}\approx\underline{\underline{4.567\cdot10^{5432}}},$$ sillä jälkimmäinen termi on **mitättömän pieni edelliseen termiin verrattuna.**

$$4.567\cdot10^{5432}-1.111\cdot10^{4321}\approx\underline{\underline{4.567\cdot10^{5432}}},$$ sillä jälkimmäinen termi on **mitättömän pieni edelliseen termiin verrattuna.**

$$(4.567\cdot10^{5432})\cdot(1.111\cdot10^{4321})=\underbrace{(4.567\cdot1.111)}_{\text{Laskimella}}\cdot(10^{5432}\cdot10^{4321})\approx\underline{\underline{5.074\cdot10^{9753}}}$$

$$\frac{4.567\cdot10^{5432}}{1.111\cdot10^{4321}}=\overbrace{\frac{4.567}{1.111}}^{\text{Laskimella}}\cdot\frac{10^{5432}}{10^{4321}}\approx\underline{\underline{4.111\cdot10^{1111}}}$$

$$\sqrt{4.567\cdot10^{5432}}=\overbrace{\sqrt{4.567}}^{\text{Laskimella}}\cdot\sqrt{10^{5432}}\approx\underline{\underline{2.137\cdot10^{2716}}}$$

10.1. (Yrjö) a) 123456 on jaollinen kahdella, koska viimeinen numero on parillinen.
b) 201003 on jaollinen kolmella, koska numeroiden summa $2+0+1+0+0+3=6$ on jaollinen kolmella.
c) 12345 on jaollinen viidellä, koska viimeinen numero on 0 tai 5.

Kertausoppaan kirjoittajien yhteystiedot

Palautetta tässä kertausoppaassa esiintyvistä virheistä, puutteista ja epäselvyyksistä voi lähettää oppaan kirjoittajille sähköpostilla osoitteilla

timo.ojala@samk.fi ja timo.ranta@tut.fi .

Otamme kiitollisina vastaan myös kaikki ideat tämän kertausoppaan kehittämiseksi, jotta se voisi jatkossa paremmin auttaa opiskelijoita jatko-opintojensa alkuvaiheessa.

Timo Ojala ja Timo Ranta

Satakunnan ammattikorkeakoulu
Sarja C, Oppimateriaalit 2/2013
ISSN 2323-8364 (verkkojulkaisu)
ISBN 978-951-633-115-0

Julkaisija:
Satakunnan ammattikorkeakoulu
Tiedepuisto 3, 28600 Pori
www.samk.fi